LUIS COUTURAT

LA FILOSOFÍA
DE LAS
MATEMÁTICAS EN KANT

Prólogo y traducción de

MIGUEL BUENO

MÉXICO, 1960

INTRODUCCIÓN

Wenn die mathematischen Urteile nicht synthetisch sind, so fehlt Kant's ganzer Vernunftkritik der Boden. *

ZIMMERMANN

La cuestión fundamental de la *Crítica de la razón pura* es la siguiente: "¿Cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*?" Desde luego, Kant no duda que existan, puesto que tales juicios son, según él, los de la metafísica y de la matemática pura. La tarea de la *Crítica* parece consistir en la explicación de cómo son posibles y válidos en la matemática y por qué no pueden serlo en la metafísica. Este es el tema de la *metodología trascendental*: "la matemática proporciona el ejemplo más evidente de una razón pura que

* "Si los juicios matemáticos no son sintéticos, faltará a toda la crítica kantiana de la razón, el fundamento". Zimmermann.

rehusa desarrollarse a espaldas de la experiencia" (B 740 y 752).[1] La metafísica trata de seguir el mismo camino, mas ¿puede aspirar lógicamente a la certeza apodíctica empleando un método racional como la matemática? Este es el problema (B 872). Ahora bien, "la metafísica es el conocimiento racional por conceptos; la matemática es el conocimiento racional por construcción de conceptos" (B 741, 865). ¿Qué significa construir un concepto? Es "exponer la intuición *a priori* que le corresponde".

La construcción de los conceptos no es posible sino a través de la intuición *a priori* que nos proporcionan las dos formas puras de la sensibilidad: espacio y tiempo. La *estética trascendental* se encarga de responder a la cuestión: "¿Cómo es posible la matemática pura?" (B 55, 73). Aquí está referido el problema, simultáneamente en la matemática y su método. El objeto no es sino la dimensión, "pues el solo concepto de dimensión se puede exhibir (B 742); espacio y tiempo son las únicas magnitudes originarias" (B 753). Su método se aplica exclusivamente a lo que puede ser objeto de intuición, de intuición *a priori* y, por consiguiente, no puede referirse a conceptos simples ni a intuiciones empíricas, como las cualidades sensibles (B 743). La matemática tiene como objetos tan sólo conceptos que se pueden mostrar, como la *figura*, en tanto determinación de una intuición *a priori* en el espacio, la *duración* como división del tiempo y el *número*, como resultado general de la síntesis de un mismo objeto en el espacio y en el tiempo, que exige de por sí una dimensión intuitiva (B 752). Es el método y no el objeto lo que distingue esencialmente a la matemática de la metafísica, y es el método de la matemática lo que determina su objeto. Ello explica por qué los juicios matemáticos pueden ser a la vez sintéticos (como los juicios empíricos) y *a priori* (como los juicios analíticos). Son sintéticos porque reposan sobre una síntesis efectuada en la intuición y son *a priori* porque dicha intuición es ella misma *a priori*. Kant caracteriza al método matemático oponiéndolo al de la filosofía. La matemática tiene axiomas, es decir, principios sintéticos *a priori* "porque sólo ella, al construir un concepto, determina *a priori* e inmediatamente sus predicados en la intuición de su objeto" (B 760). La filosofía no tendrá axiomas porque no puede partir de un concepto para relacionarlo con otro. Sólo la matemática tiene definiciones, pues sólo ella crea sus conceptos por una síntesis espontánea y por ello sus definiciones son indiscutibles y precisas. Por el contrario, en el campo de

los objetos empíricos cabe hablar de una descripción siempre dudosa, pues no cae directamente en la jurisdicción de un concepto previamente dado.[2] Tan sólo la matemática tiene demostraciones propiamente dichas, puesto que "no se le puede llamar demostración a una prueba apodíctica sino en tanto que es intuitiva" (B 762). La filosofía no puede efectuar demostraciones de este tipo porque le falta la "certeza intuitiva". La conclusión de este examen es la completa separación, la oposición absoluta, de la matemática, no sólo con relación a la metafísica sino también a la filosofía entera y sobre todo a la lógica, puesto que la lógica reposa en principios analíticos que parecen reducirse al *Principio de contradicción* y sólo permite establecer juicios analíticos. Si la matemática puede enunciar legítimamente juicios sintéticos *a priori* es porque "se ocupa de objetos en la medida que pueden representarse en la intuición" (B 8). Es evidente, por otra parte, que si Kant insiste en tal forma sobre la diferencia del método matemático y el metafísico es como reacción contra el racionalismo de Wolff, que pretendía —igual que Leibniz—, aplicar a la filosofía el método matemático, tal como si fuera el único método lógico y apodíctico.

Vamos a examinar detenidamente las tesis que se acaban de apuntar.

Definición de los juicios analíticos

¿Los juicios matemáticos son sintéticos? Para saberlo hay que definir previamente los términos *sintético* y *analítico*. Recordemos la definición de Kant: "O bien el predicado *B* pertenece al sujeto *A* como alguna cosa que está contenida (de una manera implícita) en el concepto *A* o bien *B* no está contenido en el concepto *A*, aunque tenga una cierta relación con él.[3] En el primer caso llamo al juicio, *analítico*, y en el segundo, *sintético* (B 10). Esta definición supone que todos los juicios son predicativos. Se reconoce ahora que existen otras formas de juicios irreductibles al predicativo, o dicho en otra forma, hay una multitud de relaciones que se pueden pensar y afirmar acerca de dos o más objetos, y dichas relaciones no se reducen a la única relación judicativa que expresa la cópula *es*. Aun desde el punto de vista de la lógica en Kant, aquella definición es demasiado restringida, pues se aplica únicamente a los juicios categóricos y no a los hipotéticos ni disyuntivos que, según el propio Kant, establecen una relación no sólo entre

dos conceptos sino entre dos o más juicios (B 98). Esta omisión es más notable pues declara en otro lugar no haber estado nunca satisfecho de la definición que los lógicos dan en general del juicio, diciendo que es la representación de una relación entre dos conceptos (B 140, cap. 19 de la *Crítica*).[4] La definición de Kant es insuficiente en principio. Vaihinger la ha tratado de justificar,[5] diciendo que debe extenderse también a los juicios de relación, puesto que Kant la aplica de hecho posteriormente a tales juicios (por ejemplo: $7 + 5 = 12$); pero esta es una interpretación que no parece justificada en el texto mismo. Por el contrario, Kant se preocupa de generalizar su definición pero no piensa sino en esto: que la definición se aplica únicamente a los juicios afirmativos, y agrega entonces, entre paréntesis, que también se le puede aplicar "en seguida" a los juicios negativos.[6] Empero, no es menos cierto que él ha principiado por admitir que "todos los juicios" consisten en "pensar la relación de un sujeto a un predicado" y que esta relación es siempre la relación predicativa expresada por la cópula *es*.

La interpretación se ve corroborada en explicaciones ulteriores de Kant. Los juicios analíticos "no agregan nada al concepto del sujeto" y "lo descomponen por separación de sus conceptos parciales", en tanto que los juicios sintéticos "agregan al concepto del sujeto un predicado... imposible de ser obtenido por análisis" (B 11). Kant demuestra o cree demostrar sus tesis en los ejemplos siguientes: el juicio "todos los cuerpos son extensos" es analítico, porque no es necesario salir del concepto de cuerpo para encontrar el atributo de extensión. El juicio "todos los cuerpos son pesados" es sintético porque "el predicado es otra cosa de lo que yo pienso en el mero concepto de cuerpo en general" (B 11). El pensamiento de Kant se precisa más aún en un pasaje de la *Lógica* (cap. 36); "A toda X a la que conviene el concepto A + B, le conviene también la extensión B", es un juicio analítico. "A toda X a la que conviene el concepto A + B le conviene también la nota C", es un juicio sintético. Las letras que emplea Kant para representar los conceptos[7] prueban claramente que él los considera como reunión de "conceptos parciales" que constituyen de aquél sus "caracteres esenciales". Ahora bien, ésta es una concepción unilateral y simplista de la lógica, remontada a Aristóteles y que evidentemente Kant heredó de Leibniz con todos sus radicales defectos. Por consiguiente, la distinción de los juicios analíticos y sintéticos que reposa en

ella, carece de valor universal, y vemos que no se aplica ni siquiera a todos los ejemplos que Kant cita para verificarla; por ello, nos vemos obligados a sustituirla por otra definición que tenga un valor universal. [8]

Conviene, sin embargo, penetrar en el sentido que Kant dio a la distinción. Puede recibir —y ha recibido de hecho— interpretaciones distintas, según se le enfoque desde un punto de vista lógico o psicológico. En el sentido psicológico, se refiere al acto del pensamiento en el momento de formular el juicio; en su sentido lógico adjudica un contenido objetivo y universal al juicio, independiente del sujeto temporal que lo piensa. [9] Muchos comentadores y críticos han sostenido la tesis de que la distinción entre juicios analíticos y sintéticos tiene sólo un aspecto psicológico: un juicio es sintético la primera vez que se formula porque descúbrese un nuevo predicado, y será analítico desde el momento en que el nuevo predicado esté incorporado al sujeto. [10] En este sentido puede afirmarse que el juicio "los cuerpos son pesados" es sintético para el vulgo y aun para el geómetra, pero es analítico para el físico, quien no puede concebir a los cuerpos sin una fuerza de atracción.

Parece que Kant entiende la distinción en tal sentido, puesto que admite al predicado contenido en el sujeto "de una manera latente" (B 10) y que se ha pensado "confusamente como perteneciente al sujeto" (B 11, p. 9); esas expresiones parecen referirse al carácter psicológico y esencialmente subjetivo del pensar. Kant mismo dice más adelante: "La cuestión no consiste en saber lo que debemos agregar a un concepto dado por medio del pensamiento, sino en lo que pensamos realmente de él, no importa que sea de un modo obscuro" (B 17). Pero no hay por qué interpretar forzosamente estas expresiones en un sentido psicológico, y el último pasaje lo prueba. Significa exactamente lo que sigue: no toda relación necesaria es analítica, y de que unamos un predicado a un sujeto no se concluye que aquél se encuentre lógicamente contenido en éste. [11] Así, Kant entiende la distinción en un sentido lógico. [12] Dice en otra parte: "La diferencia entre una representación confusa y una representación distinta es simplemente lógica y no recae sobre el contenido" (B 61). Es evidente que Kant entiende aquí por lógico lo que nosotros entendemos por psicológico; opone lo que *pensamos* más o menos implícitamente en un concepto, y la manera como lo pen-

samos, a lo que está *contenido* lógicamente en el concepto, ya sea que lo pensemos o no [13] La definición del concepto es lo único que determina su contenido lógico, y esto se concluye de los siguientes pasajes: "Yo debo considerar lo que pienso realmente en mi concepto del triángulo (*esto no es más que la simple definición*)" (B 746); y después: "sería, pues, en vano, que tratara de filosofar sobre el triángulo, es decir, que lo pensara en una forma discursiva, pues no podría ir más allá *de la simple definición*..." (B. 747). Es la definición la que sirve de criterio a los atributos analíticos y, por consiguiente, a los juicios analíticos. [14] ¿Por qué el juicio "todos los cuerpos son extensos" es analítico? Porque la noción de extensión está contenida en la de cuerpo, y forma parte de su definición. ¿Por qué el juicio "todos los cuerpos son pesados" es sintético? Porque no hay necesidad del carácter de pesantez para definir un cuerpo; está completamente establecido por otros caracteres y este último sólo puede concebirse después de un cierto proceso de síntesis (B 12). Se ve, pues, que el distingo de los atributos analíticos y los sintéticos en un concepto, es el dato puramente lógico de que formen parte o no, de su definición. [15]

¿Cuál es la base sobre la que funda Kant los juicios analíticos? Es tanto el principio de identidad como el de contradicción, que él mismo distinguió y confundió simultáneamente. [16] En su obra *Principiorum primorum cognitionis metaphysicae nova dilucidatio* (1755), considera al principio de identidad y no al de contradicción, como fundamento de las verdades, tanto afirmativas como negativas, sometiéndolas a esta doble forma: *lo que es, es*; *lo que no es, no es*. En su *Investigación sobre la claridad de los principios de la teología natural y de la moralidad*, III, cap. 3 (1764), considera al principio de identidad como fundamento de los juicios afirmativos y al de contradicción como fundamento de los juicios negativos; tacha de errónea la tesis de que el segundo principio sea el único de todas las verdades. En la *Crítica* no admite más que un "principio supremo de todos los juicios analíticos" y es el principio de contradicción, que formula como sigue: "A ninguna cosa le conviene un predicado que la contradiga", [17] y declara expresamente que "cuando un juicio es analítico, bien sea negativo o afirmativo, su verdad debe ser suficientemente reconocida de acuerdo con el principio de contradicción" (B 190).

A decir verdad, no se ve claramente cómo este principio negativo puede servir de fundamento a los juicios analíticos, "tanto afirmativos como negativos". El tipo del juicio analítico afirmativo es, según lo hemos visto, "*ab* es *a*". Ahora bien, el principio de contradicción, tal como Kant lo formula, impide atribuirle al sujeto *ab* los predicados *no-a* o *no-b*, pero no dice en lo absoluto qué predicado sí podemos o debemos atribuirle.

En los *Prolegómenos* (2, b), Kant explica su pensamiento: "Como el predicado de un juicio analítico afirmativo está pensado de antemano en el concepto del sujeto, no le puede ser negado al propio sujeto sin contradicción..."[18] ¿Qué significa esto? No se trata de negar, sino de afirmar, y este principio de contradicción no ordena la afirmación del predicado, a menos que "no negarlo" sea sinónimo de "afirmarlo".[19] Kant continúa: "igualmente, su contrario debe ser negado del sujeto en un juicio analítico negativo, también como consecuencia del principio de contradicción". En esto tiene razón, pero no hace más que probar que el principio de contradicción es el fundamento de los juicios analíticos negativos. Se necesita buscar por otra parte el de los juicios analíticos afirmativos, que probablemente sea el principio de identidad. Por fin, en su *Lógica*, (Int. VII, 1800), Kant admite tres principios lógicos; el *Principio de identidad o de contradicción*, fundamento de los juicios problemáticos; el *Principio de razón suficiente*, fundamento de los juicios asertóricos; y el *Principio de tercero excluido* fundamento de los juicios apodícticos. Así pues, considera aquí al principio de razón suficiente como analítico, en tanto que en los *Prolegómenos* (3, 1783) lo califica de sintético. Es difícil —hay que admitirlo— encontrar una opinión más cambiante que ésta en torno a un tema tan fundamental.

Probable es que en la *Crítica* asimilara Kant el principio de identidad con el de contradicción; por otra parte, confunde con mucha frecuencia los juicios analíticos con los juicios tautológicos y los llama de igual modo.[20] Los juicios analíticos serían los juicios virtualmente idénticos; y esto es sin duda lo que quiso decir cuando se refería a predicados contenidos de una manera "latente", "confusa" o de nuevo "obscura", en el sujeto. Pero el principio de identidad sólo justifica a los juicios idénticos y no a los juicios analíticos. Nunca de la fórmula *a es a* podrá deducirse la fórmula *ab es a* por la simple razón de que esta última contiene una operación o combinación (la multiplicación lógica) que no figura en el principio de identidad. Por ello, la lógi-

ca moderna se ha visto obligada a admitir el *principio de simplificación* ($a + b$ *es* a) al lado del principio de identidad e independientemente de él. Esta objeción, en apariencia demasiado sutil, prueba la falsedad en la concepción tradicional de la lógica formalista, que hacía reposar todo el conocimiento en el solo principio de identidad, de lo cual es necesario concluir que semejante fundamento lógico es absolutamente estéril, porque sólo permite el regreso de un elemento sobre sí mismo y justifica únicamente los juicios tautológicos, que son vanos por completo.

Así, queriendo interpretar fielmente la doctrina de Kant en su contribución a la lógica moderna, es de sostener que el principio de los juicios analíticos es el principio de simplificación. Pero esta expresión es demasiado restringida, porque cuando Kant afirma que "todos los razonamientos de los matemáticos se efectúan según el principio de contradicción" (B 14), quiere decir en el fondo que se efectúan según las reglas de la lógica. Ahora bien, sabemos que la lógica formal no puede integrarse sin un gran número de principios independientes. La exégesis de Kant permite sustituir la expresión restringida: "el principio de contradicción" por la otra: "los principios de la lógica". Y por consiguiente, debemos enfatizar que los juicios analíticos son los que reposan únicamente en los principios de la lógica.

Esta fórmula no basta aún; deseamos completarla basándonos en las explicaciones del propio Kant: los principios de la lógica son esencialmente formales y por consiguiente, vacíos de contenido. Para efectuar un razonamiento cualquiera es necesario darles una materia, y ésta sólo puede introducirse en un sistema lógico bajo la forma de definiciones, lo cual es evidente, dado que sólo es posible razonar con términos que han sido previamente definidos. Hemos visto antes que, según el mismo Kant, el criterio de los juicios analíticos y sintéticos puede hallarse en las definiciones, y todo lo que está contenido en la definición de un concepto se deduce lógicamente de él, constituye un carácter analítico, y todo lo que se agrega sin necesidad lógica es un carácter sintético. Hay que decir, pues, para conservar el espíritu y no tan sólo el texto de la doctrina kantiana, que un juicio es analítico si puede únicamente deducirse de ciertas definiciones y de los principios lógicos[21] y es sintético si su demostración (o verificación) supone más elementos que los principios y las definiciones.

Para objetar nuestras observaciones, podría hacerse referencia a la distinción que establece Kant entre definiciones analíticas y sintéticas. Esta distinción, indicada sólo de paso en la *Crítica de la razón pura,*[22] se encuentra expresada didácticamente en la *Lógica* (§ 100). Apunta desde el período precrítico y se encuentra desarrollada sobre todo en la *Investigación sobre la claridad de los principios de la teología natural y de la moralidad* (1764), donde ocupa un sitio preponderante. Definición analítica es la de un concepto *dado;* definición sintética es la de un concepto *fabricado.*[23] La definición analítica consiste en descomponer un concepto existente de antemano; la definición sintética, por el contrario, integra al sujeto y lo compone en sus diferentes partes. Ahora bien, según la *Lógica* (102, 103), los conceptos empíricos no pueden definirse sintéticamente, porque las definiciones sintéticas se aplican únicamente a conceptos formados *a priori* y espontáneamente. Pero los conceptos espontáneamente formados son los conceptos matemáticos; así pues, todas las definiciones matemáticas son esencialmente sintéticas.

Esta distinción se originó en la época en que Kant se inclinaba por las doctrinas del empirismo, y en aquel opúsculo de 1764 fue postulada con la finalidad de oponer entre sí a la filosofía y la matemática desde el punto de vista de su método y grado de verdad, llegando a esta conclusión: "Se debe proceder analíticamente en metafísica puesto que su papel consiste en analizar conocimientos confusos." Esta tesis parece contraria a la doctrina criticista, según la cual los juicios metafísicos son sintéticos, como los juicios matemáticos. Es notable el hecho de que tal distinción se relaciona con algunas proposiciones de la *metodología trascendental,* a saber, que la matemática principia con definiciones, en tanto que la filosofía termina con ellas; que las matemáticas consideran lo general en lo particular, de acuerdo con el método de la concreción, mientras que la certeza filosófica es completamente distinta. Por lo anterior, seguir el ejemplo de la matemática es funesto para la metafísica y por todos conceptos no debe imitarla en su método. De todo esto se concluye que la mencionada distinción data del período precrítico y no está conforme con los principios de la doctrina criticista.

Pero hay más, en el mismo opúsculo de 1764, Kant considera los conceptos matemáticos como hechos *a priori* y espontáneamente. En otros términos, define a la matemática como la ciencia

que fabrica *a priori* sus objetos. Pero ésta es una concepción distinta de la que se encuentra en la *Crítica*, donde la matemática está definida precisamente como el conocimiento racional por construcción de conceptos. En el primer caso, el método matemático puede aplicarse a todos los conceptos espontáneamente formados; en el segundo se aplica tan sólo a los conceptos que pueden ser construidos, es decir, representados en la intuición. [24] Esta diferencia tiene consecuencias, pues de acuerdo con ella, ¿qué impediría a la metafísica construir también sus conceptos *a priori* y emplear, por consiguiente, el llamado método matemático? Lo que caracteriza a los conceptos matemáticos, según la *Crítica*, no es precisamente el que sean sintéticos, sino que son intuitivos; pero esta tesis no figura en la obra de 1764, [25] donde propiamente no existe ningún argumento que pueda justificar la distinción absoluta de la matemática y la filosofía, tal como se encuentra en la *Crítica*, puesto que es la intuición el criterio que distingue a los juicios matemáticos de los juicios metafísicos, ya que tanto unos como otros son juicios sintéticos *a priori*.

Pero aún así, éstos son problemas secundarios. La objeción capital es ésta: ¿De que las definiciones matemáticas sean sintéticas y las metafísicas sean analíticas, se concluye que los

juicios matemáticos son sintéticos? ¿Y por qué no se deduce también que los juicios metafísicos son analíticos? En efecto, los caracteres de *analítico* y *sintético* se atribuyen en el primer caso a los conceptos y en el segundo, a las proposiciones; con eso se dan dos sentidos distintos a un mismo término, y si pudiéramos reducir el uno al otro se obtendría una tesis contraria a la de Kant, o sea que los conceptos matemáticos son construidos *a priori* y sólo existen por su definición, de lo cual resulta que se postulan de antemano sus características, y consiguientemente los juicios ulteriores tendrán que ser analíticos. Por el contrario, si los conceptos metafísicos se dan hechos en cierta forma, y su análisis es siempre incompleto, es seguro que los juicios metafísicos tendrán que ser sintéticos. En resumen, los conceptos sintéticos parecen dar lugar a juicios analíticos y los conceptos analíticos a juicios sintéticos. [26] No queremos decir que esta conclusión sea justificada, sino únicamente que es más viable que la contraria y, por consiguiente, que no se puede inferir del carácter sintético de las definiciones matemáticas, el carácter sintético de los juicios matemáticos. [27]

Si consultamos, ya no la opinión de Kant, sino a la matemática misma, podremos contestar que todas las definiciones matemáticas son pura-

mente *nominales*: consisten en determinar el sentido de un término nuevo y suponerlo separado de las otras categorías matemáticas cuyo sentido nos es conocido, ya sea que las hayamos definido con anterioridad o bien que las consideremos como indivisibles. Hablando en rigor, según el estilo de la lógica matemática una definición es una igualdad lógica (identidad) cuyo primer miembro es un signo nuevo que aún no tiene sentido; el segundo miembro, en cambio, está compuesto por datos conocidos que determinan el sentido del signo en cuestión. Una definición no es una *proposición* puesto que no es ni verdadera ni falsa; no se le puede comprobar ni refutar, es simplemente una convención que coloca en un solo signo las propiedades que pertenecen a varios de ellos, y, una vez admitida, esta convención puede convertirse en una proposición sólo en la medida que es utilizada para sustituir un miembro por otro en las ecuaciones lógicas del razonamiento ulterior.

Pero ésta es una proposición idéntica, no sólo porque el primer miembro tiene exactamente el mismo sentido que el segundo, sino porque tan sólo tiene sentido propiamente el segundo miembro. Aún más, esta proposición idéntica no puede ser considerada de ningún modo como un principio de demostración, pues todas las deducciones que se obtengan de él consisten en sustituir lo definido por lo definiente [28] o viceversa. Podrá entonces efectuarse un gran número de deducciones, con mayor o menor complejidad, pero siempre y únicamente por medio de esta substitución. Entonces, una definición no es una verdad ni una secuencia de verdades; no forma parte del encadenamiento lógico de las proposiciones y es sólo un auxilio cómodo, una técnica de abreviación. Poco importa que se la llame analítica o sintética (es cuestión de palabras); su naturaleza y forma no pueden influir de ningún modo sobre el carácter analítico o sintético de las proposiciones que han de ser definidas y, en todo caso, insistimos en que si una definición debe ser una proposición, no podrá ser más que una proposición idéntica. [29]

Habiendo establecido estos principios, investigaremos si las tesis de la matemática son realmente sintéticas. Importa señalar que la opinión de Kant parece variar mucho según el curso de su pensamiento. En la *metodología trascendental* sostiene que únicamente la matemática tiene como demostraciones, pruebas *apodícticas e intuitivas*, y rehusa llamar demostración a las deducciones puramente lógicas (analíticas) que se obtienen de tales conceptos. Por el contrario, en los *Prolegómenos* (2, c) y en la Introducción de la *Crítica*

(B 14) declara que "los razonamientos matemáticos actúan *todos* según el principio de contradicción (*lo cual es exigido por la naturaleza de la certeza apodíctica*)". Es difícil no encontrar ahí una contradicción, pero es de señalar que, junto a este pasaje donde Kant hace una imprudente concesión a quienes sostienen que los juicios matemáticos son analíticos, está la *Metodología*, que contiene su verdadero pensamiento, su doctrina madura y sistematizada.

¿Cuáles son las matemáticas puras?

Otra cuestión por resolver, más difícil aún, consiste en saber qué ciencias fueron tomadas por Kant como matemática pura, y de qué manera se relacionan con las dos formas *a priori* de la sensibilidad que, según él, constituyen su fundamento. El pensamiento de Kant es singularmente vacilante cuando se refiere a estos puntos, por cierto demasiado esenciales. En la *Dissertatio* de 1770, el espacio era objeto de la geometría y el tiempo de la mecánica pura; ambas formaban parte de la matemática pura. El número era un "concepto intelectual" que se realizaba en concreto por medio del espacio y el tiempo.[30] En la *Estética trascendental* el espacio

es el fundamento de las verdades geométricas, pero no se dice ahí qué ciencia sea fundamentada por el tiempo. Los principios apodícticos que lo definen son los siguientes: "el tiempo no tiene más que una dimensión; tiempos diferentes no son simultáneos, sino sucesivos" (cap. 4, 3). Esos son los "axiomas del tiempo", según la 1ª edición de la *Crítica* y no tienen nada que ver con los axiomas de la aritmética. En la "explicación trascendental", agregada a la 2ª edición (§ 5), es más explícito: el tiempo fundamenta la posibilidad de todo cambio y en particular del movimiento (cambio de lugar), por consiguiente, de la "ciencia general del movimiento, que no es poco fecunda" y es declarada conocimiento sintético *a priori*. Esta concepción va de acuerdo con la tesis sostenida por Kant respecto al principio de contradicción, a saber, que este principio deviene sintético cuando se introduce en él la noción de tiempo, y lo enuncia como sigue: "es imposible que una cosa sea y no sea al mismo tiempo" (A 152, B 191).[31] Pero difiere, en cambio, de lo que declara en la *Estética trascendental* (§ 7) acerca de que el concepto de movimiento es empírico porque presupone la percepción de algo que se mueve (A 41, B 58). Kant insiste en el tema y afirma que "en el espacio considerado en sí mismo no se da ningún móvil" y que éste

sólo puede representarse empíricamente en el espacio. Aun el concepto de cambio no puede ser dado *a priori* en la *Estética trascendental* porque el tiempo no cambia, sino únicamente el contenido del tiempo. ¿En qué consiste, entonces, según esa teoría, la "ciencia general del movimiento" que Kant había considerado como pura y *a priori*? [32]

Su pensamiento se ve más preciso en la teoría del esquematismo, donde el número es presentado como esquema (el esquema de la magnitud) es decir, como determinación *a priori* de la intuición del tiempo y no del espacio. Pero si se consulta a la *Metodología trascendental*, se verá que el número relaciónase a la vez e indiferentemente, con el espacio y con el tiempo (A 724, B 752). En los *Prolegómenos* (§ 10), sólo dos años después de la aparición de la *Crítica*, determina Kant las relaciones de las ciencias matemáticas con la intuición *a priori*, como sigue: "La geometría tiene como base la visión pura del espacio. La aritmética produce ella misma su concepto de número por la adición sucesiva de las unidades, que es posible en el tiempo; la mecánica pura, sobre todo, puede producir sus conceptos de movimiento sólo por medio de la representación del tiempo." Las palabras "sobre todo" traicionan y revelan las dudas de Kant. [33]

En el Prefacio de *Los primeros principios metafísicos de la ciencia natural* (1786) sostiene que la matemática "no es aplicable a los fenómenos del sentido interno y a sus leyes" porque "esta extensión del conocimiento, comparada al que la matemática procura a la teoría de los cuerpos, sería más o menos lo que la teoría de las propiedades de la línea recta es con respecto a toda la geometría; así pues, la intuición pura interna... es el tiempo, que no tiene más que una sola dimensión". [34] Entonces, la matemática del tiempo no existe, por así decirlo, o se reduce a muy poca cosa, a lo que Kant llama la "*ley de continuidad* en el transcurso de las modificaciones del sentido interno". No se trata pues, de la aritmética, ni mucho menos de la mecánica. A través de todas esas fluctuaciones no existe más que un punto firme: la correspondencia de la geometría con su objeto, el espacio. Pero Kant insiste en la ciencia cuyo fundamento es el tiempo. [35] Ésta puede ser, bien la aritmética, según la *teoría del esquematismo*, o bien la mecánica, de acuerdo con la creencia común. Cuando Kant se da cuenta de que la mecánica reposa con el mismo derecho en el espacio y en el tiempo, y que implica un dato empírico (la materia, sujeto del movimiento) regresa a la concepción de la aritmética como ciencia pura del tiempo, aun-

que no le satisface.[36] Pero a esto se ve orillado por el sentido mismo de su sistema.[37] De cualquier modo nos atendremos a la definición indicada en la Introducción y sólo consideraremos como matemática pura la aritmética (con el algebra y el análisis) y la geometría. Examinaremos las proposiciones de estas dos ciencias para determinar si son de carácter analítico o sintético.

¿Los juicios aritméticos son sintéticos?

Para probar sus tesis Kant acostumbra recurrir a ejemplos; por ello discutiremos sus propios ejemplos. En torno de la ecuación particular $7 + 5 = 12$, afirma que "el concepto de la suma de 7 y 5 no contiene más que la reunión de ambos números en uno solo", que esta reunión no implica en lo absoluto el concepto de ese número único; por más que se analice el concepto de la suma no se hallará el número 12 y, por consiguiente, para obtener tal concepto es necesario recurrir a la intuición, contando, por ejemplo, los números con los dedos (B 15). Estas afirmaciones corresponden realmente a una concepción bastante burda de la aritmética.[38] Por el contrario, dado que el concepto de la suma de

7 y 5 implica la reunión de ambos números (o más exactamente de sus unidades) en uno solo, por ello mismo contiene este propio número, el cual queda determinado de manera unívoca. Así, entre $7 + 5$ y 12 no sólo hay igualdad sino identidad absoluta.[39] Esta proposición se debe, por una parte, al principio de identidad, y por otra, a la definición de los números 7 y 5; por consiguiente, es analítica.[40] Y no será necesario recurrir a ninguna intuición para demostrarla rigurosamente.[41]

Kant sostiene que el carácter sintético de las verdades aritméticas se ve más claramente cuando se trata de grandes cantidades (B 16), pero este mismo argumento se vuelve en contra de él. En efecto; es prácticamente imposible tener la intuición precisa de números del orden, por ejemplo, de los millones, y de ninguna manera se podrían manipular cantidades similares si fuese necesario recurrir a la intuición. Lo que es válido para grandes cantidades lo es para pequeñas y, por consiguiente, no es la intuición sino el razonamiento lo que permite afirmar que 2 y 2 son 4.

Pero ésta no es la opinión de Kant, que considera todas las verdades aritméticas como proposiciones "inmediatamente válidas", "evidentes" e "indemostrables" (B 204, 205). De aquí re-

sulta que deberíamos admitir infinidad de axiomas puesto que tales verdades son en número infinito.[42] Kant se dio cuenta de la dificultad y pretendió evadirla llamando a estas verdades no precisamente axiomas, sino "fórmulas numéricas", porque según él, no son generales como los axiomas de la geometría. Como quiera que las llame, lo cierto es que admite una infinidad de proposiciones sintéticas primarias e irreductibles, lo cual no está conforme a la idea de una ciencia racional. Pero entonces, ¿cómo requiere del cálculo, y frecuentemente de grandes cálculos, para descubrirlas o demostrarlas? Si las verdades aritméticas fueran realmente intuitivas no sería tan difícil *verificar* (no he dicho *demostrar*) el famoso teorema de Goldbach: "Todo número par es igual a la suma de dos números primos." En realidad todas las verdades aritméticas son demostrables y las únicas verdades primarias que no necesitan demostración son los axiomas generales de los que precisamente Kant no se ocupa.

Se ha dicho que no basta refutar un error; es necesario explicarlo. El del filósofo se explica por su concepción rígida de la lógica.[43] Por ejemplo, dice que "podemos volver y revolver sobre nuestros conceptos tanto como queramos pero nunca se llegará a encontrar la suma por simple descomposición de nuestros conceptos..." (B

16). Pero, ¿quién nos dice que todos los conceptos están "compuestos" de conceptos parciales, de manera que baste "descomponerlos" para descubrir todas sus propiedades? Este es un viejo prejuicio de la lógica tradicional, que puede aplicarse a ciertos conceptos empíricos, pero que precisamente no se aplica a los conceptos matemáticos.[44] La misma exigencia casi ociosa se manifiesta en otro pasaje: "yo no pienso el número 12 ni la representación de 7 ni la de 5, ni la representación de la reunión de ambos" (B 205). Que el concepto de 12 no esté contenido en el 7 ni en el 5, es evidente; pero la cuestión es que pueda o no derivarse de la "reunión" de ambos, y esto depende precisamente de lo que se entienda por "reunión". Kant percibió la debilidad de su argumento agregando un paréntesis donde parece descubrir una distinción sutil entre "reunión" y "adición": ("Que yo deba pensar el número 12 como suma de ambos no es una cuestión procedente aquí —nos parece, por el contrario, que esa es precisamente la cuestión— puesto que un juicio analítico sólo permite saber si yo pienso realmente el predicado en la representación del sujeto.") Parece que se refugia en una consideración de orden psicológico, distinguiendo lo que se *debe* pensar y lo que se piensa *realmente*. A esto responderíamos que si *realmen-*

te no se piensa el predicado en la representación del sujeto porque no se le represente *realmente*, es natural que si nos contentamos con un pensamiento simbólico (como diría Leibniz), bastará la representación de los signos 7 + 5, de lo cual no se obtendría la idea del número 12; pero si se piensa *realmente* en 7 unidades por una parte, en 5 unidades por otra y se les piensa como reunidas en un solo número (lo cual está indicado por la presencia del signo +) entonces se pensará necesariamente el número 12.[45]

Pero éste no es el verdadero sentido de la proposición, como lo muestra otro párrafo que hemos comentado con anterioridad (B 17). Significa en realidad (a pesar del uso equívoco e irregular que hace Kant en la misma frase de los términos "pensamiento" y "representación"): "No es reuniendo en el pensamiento los dos conceptos de 7 y 5 como yo obtengo el concepto de 12, sino construyéndolos en la intuición y reuniendo en ella los dos términos correspondientes para formar uno solo." Por otra parte, si Kant admite que los números son conceptos, éstos tendrán que serlo de grupos; el número 7 será el concepto de un grupo de 7 objetos, y así sucesivamente. Pero no hay que confundir esto con un grupo determinado, de igual modo que no debe confundirse en general un concepto cualquiera con los objetos a los que se aplica. Ahora bien, si la aritmética emplea realmente conceptos de números y no de grupos concretos (como podrían serlo gises o piedras) la división de los números debe ser una combinación conceptual y no intuitiva; claro que puede representarse en la intuición, como los números mismos, pero esta operación es meramente formal y nada tiene que ver con la naturaleza de los objetos que sirven para representar el concepto. Por otra parte, la relación que se establece entre ambos números, o mejor dicho, entre sus unidades, es de la misma naturaleza que la relación entre las unidades de cada número cuyo conjunto constituye ese número. Sería pues, absurdo, admitir un nexo ideal entre las unidades constitutivas de cada número y creer que entre las unidades de ambos números el nexo sería intuitivo. Si se considera a la suma como operación intuitiva, habría que sostener que los números mismos existen sólo en la intuición (tal es la tesis del empirismo) y que los conceptos de números se reducen a palabras o signos carentes de auténtico sentido.[46] El anterior razonamiento explica ese extraño argumento en una frase añadida en la 2ª edición de la *Crítica*: "que se deba agregar 5 a 7, es lo que he pensado sin duda en el concepto de una suma 7 + 5, pero no precisamente que esta suma sea igual al

número 12". Kuno Fischer comenta este pasaje en la siguiente forma: "7 + 5, sujeto de la proposición, ordena: ¡suma ambas magnitudes! El predicado 12 expresa que han sido sumadas. El sujeto es un problema; el predicado es la solución".[47] He aquí una solución bastante extraña: ¿Dónde se ha visto que un problema sea el sujeto de una proposición y que su respuesta sea el predicado? Un problema es una proposición interrogativa o problemática y su solución es un juicio asertórico o apodíctico. Por otra parte, ¿cómo se llega de los datos de un problema a su solución? Sólo a través de un razonamiento y no por una operación mecánica o intuitiva. Aquélla es una manera ilegítima de dramatizar la cuestión, puesto que hace intervenir consideraciones psicológicas improcedentes. Poco importa que una proposición se brinde al espíritu como problema o como teorema; tampoco interesa el tiempo que tome verificarlo o el método que se emplee para ello; todo esto es asunto personal. Por otra parte, un miembro de una igualdad matemática no puede ser un problema, y sólo podrá serlo desde un punto de vista psicológico; lógicamente es una verdad eterna que no depende de las condiciones en que se llegue a su conocimiento.[48] Pero lo más asombroso de todo esto es que un problema postulado por el entendimiento (puesto que Kant habla del concepto de la suma 7 + 5) sólo pueda ser resuelto por la intuición. En realidad, la dificultad surgirá si se cree que "7 + 5" es un mero conjunto de palabras o signos; pero si consideramos su sentido lógico, desaparece el problema, pues la misma conciencia que postula 7 + 5, postulará al mismo tiempo 12. Repetiremos una vez más que esta igualdad matemática no representa una operación compleja; es una identidad absoluta. La operación no se efectúa en el tránsito del primer miembro al segundo, sino en la formación del primero por medio del signo +. No se trata de saber cómo se constituye al sujeto, sino cómo el sujeto, ya constituido, contiene al predicado.

Todo esto surge del juego que hace Kant con los términos *reunión* y *adición*. Parece que, según él, para obtener el número 12 no basta reunir en el pensamiento los números 7 y 5, tal como se reúnen dos conceptos parciales (animal y racional) para obtener un concepto total (hombre); hay que adicionarlo, y esta operación, según él, sólo puede efectuarse en la intuición.

El distingo es correcto, pero se vuelve contra el propio Kant puesto que el sujeto no es "7 y 5", sino "7 + 5", lo que significa que para formarlo no basta con "reunir" los dos miembros sino que deben ser sumados, precisamen-

te lo que indica el signo +. Si Kant rehuye hacerlo y se limita a reunirlos, no tiene derecho a hablar del concepto de suma. Así pues, le reprocha a la adición aritmética no ser como la multiplicación lógica (como si hubiera únicamente una manera de combinar los conceptos) y se cree autorizado para substituir ésta por aquélla, con lo cual desvirtúa la naturaleza del problema. De parecida manera a como los conceptos de números no se pueden definir por género y diferencia específica, ni descomponer en factores lógicos, tampoco se les puede combinar por el procedimiento de la multiplicación lógica. Esto prueba palpablemente la insuficiencia de la lógica tradicional.

Mas no podría concluirse de ahí que la adición aritmética escape al alcance de la verdadera lógica, ya que puede y debe fundamentarse en la adición lógica. [49] Sea *A* un conjunto de 7 objetos y *B* otro de 5 objetos; se supone que ambos conjuntos carecen de elementos comunes. La suma de 7 y 5 es el número del conjunto que se forma reuniendo los dos anteriores. Es el número de la suma lógica de *A* y *B*. Cuando Kant afirma que es necesario "salir" de los conceptos 7 y 5 para encontrar el 12, quiere decir simplemente que esta suma no se obtiene combinando directamente los dos números, sino adicionando

las clases a que corresponden, es decir, no por una multiplicación lógica sino por una adición lógica. [50] Pero esto no significa que se deba "salir" del concepto 7 + 5 puesto que tal adición está contenida en él y sólo queda por ser realizada en el espíritu.

Tal vez se objetará que por el hecho mismo de substituir los conceptos de números por las clases correspondientes, se va del dominio del pensamiento al de la intuición. ¿Que representemos los números por grupos de objetos no dará a Kant la razón, evidenciando que la suma es una operación intuitiva y no intelectual? A ello responderemos: un número es única y exclusivamente el concepto de un grupo, y pedir que se conciba al número sin pensar en el grupo es pedir un imposible. [51] Por otra parte, ley psicológica es que todo concepto, por más abstracto que sea, necesita apoyarse en cierta imagen, y es natural que por ello mismo hagamos razonamientos sobre un número acompañándolo de alguna imagen más o menos vaga. La cuestión epistemológica, independiente y distinta de las circunstancias psicológicas, puede plantearse así: ¿Cuál es el fundamento lógico de las verdades aritméticas? ¿El concepto o la intuición? Cuando considera analíticos los siguientes juicios: "El oro es amarillo", "todo cuerpo es extenso", no

pretende que se deba desmembrar su imagen sensible, lo cual, para ambos juicios, es bastante más difícil que para las verdades aritméticas; no exige que pensemos al oro sin su color, ni a los cuerpos sin su extensión, puesto que según su propia doctrina no podríamos desembarazarnos jamás de la intuición del espacio y además no se detiene a examinar si por el hecho de que tales juicios requieren de imágenes pueden ser tachados de sintéticos. Ahora bien, esto se debe a que cualquiera que sea el origen psicológico del juicio y de las imágenes adjuntas, el concepto de oro y de cuerpo comprenden por definición a los conceptos de amarillo y de extensión.[52] Asimismo, no el concepto de "7 y 5", sino de "7 + 5", contiene esencialmente al concepto de 12. Más aún, ambos conceptos son idénticos.

Este razonamiento se confirma con precisión en las explicaciones ulteriores de Kant. El filósofo conoce, en efecto, que la matemática emplea algunos principios analíticos y declara: "aunque sean válidos como meros conceptos, son admitidos en la matemática porque pueden presentarse en la intuición" (B 17). Pero inversamente, de que las proposiciones sean representadas en la intuición (aun necesariamente) no se concluye que sean sintéticas y puedan valer "propiamente como conceptos".[53] Por lo demás podría notarse que Kant escogía bastante mal su ejemplo de principio analítico: "El todo es mayor que la parte", expresado con los signos $a + b > a$. Esta proposición no es un principio o axioma, puesto que vale sólo para ciertos tipos de magnitudes y no para todas. Es un simple teorema que se demuestra definiendo los signos $+$ y $>$, a menos que precisamente se tome esta fórmula como su definición. El teorema es válido para los números finitos, pero no se aplica a los números cardinales transfinitos.[54] No se reprochará a Kant haber ignorado estas verdades, por más elementales y simples que sean en la actualidad; sin embargo, preguntamos cómo pudo admitir, de acuerdo con sus propias ideas, que tal proposición fuese analítica. En efecto, si se considera el primer miembro, tendremos una suma análoga a $7 + 5$, y si ésta se funda en la intuición, aquélla debe estarlo con más razón todavía, y si no se concluye analíticamente que $7 + 5$ sea 12, menos aun puede saberse cuál es la suma de A y B, y por consiguiente, que sea mayor que A. Por otra parte, si se considera a la cópula (el signo $>$) es fácil notar que la verdad de la proposición depende esencialmente del sentido que tenga la cópula, y cualquiera que sea es menos analítico que el de la cópula $=$ que significa precisamente la identidad; con más ra-

zón, pues, debía Kant sostener que el concepto *mayor que* reposa en la intuición. El filósofo no debía creer un instante que el predicado A está contenido en el sentido lógico del sujeto $A + B$, pues, por una parte, dicho sujeto no es un predicado lógico sino una suma matemática, y por la otra, el juicio no es predicativo, como parece exigir la definición de los juicios analíticos.[55] Además, no debió ilusionarse que el juicio descansa en el principio de contradicción, puesto que es contradictorio suponer: $A + B = A$, o $A + B < A$. Por lo tanto, en cualquier forma que se examine la proposición no se descubrirá ningún motivo para considerarla analítica, no siéndolo "$7 + 5 = 12$"; o recíprocamente, a esta última como proposición sintética y que no lo fuera el juicio propuesto $A + B > A$. ¿Qué otra cosa podemos concluir si no que la distinción de juicios analíticos y sintéticos estuvo singularmente vaga e insegura en el espíritu mismo de su autor?[56]

Por lo demás, tal concepción lo indujo a errores flagrantes. Por ejemplo, él considera como juicio analítico este principio: "Si agregamos o sustraemos elementos iguales a magnitudes iguales, éstas siguen siendo iguales." Tiene conciencia inmediata sobre la identidad de las magnitudes comparadas (B 204), pero este es un juicio que, lejos de reposar en el principio de identidad indica una propiedad de la adición (o de la sustracción), a saber, que la operación es *uniforme*. Es un axioma aplicable en unos casos y falso en otros. Por ejemplo, en el caso de la extracción de raíces, no puede escribirse $\sqrt{4} = \sqrt{4}$ (aunque esta igualdad tenga toda la apariencia de identidad) y que se tenga de ella —según las palabras de Kant— una inmediata conciencia de la identidad en la generación de la magnitud, puesto que $\sqrt{4}$ puede ser tanto $+ 2$ como $- 2$, de suerte que la igualdad considerada podría conducir al absurdo: $+ 2 = - 2$.

El esquematismo

Sólo queda un argumento en pro de la naturaleza sintética de las verdades aritméticas: es el concepto de número, tal como se obtiene en la teoría del esquematismo. Sabemos que, según Kant, el número, esquema de la magnitud, "es una representación que implica la suma sucesiva de unidades de la misma especie"; por consiguiente, "el número no es otra cosa que la unidad sintética de la multiplicidad de una intuición homogénea en general, por el hecho de que el yo requiere del tiempo en la aprehensión intuiti-

va" (B 182). Así, en tanto esquema, el número es intermediario entre la sensibilidad y el entendimiento a la vez intelectual e intuitivo. Por una parte, es un producto de la imaginación, y por otra, participa de la generalidad del concepto y en ello se distingue de la imagen.

De esto resulta que el número tiene un contenido intuitivo donde se implica esencialmente la sucesión; tratándose particularmente de la intuición del tiempo, sirve aquélla de fundamento a los juicios aritméticos y explica así su carácter sintético. Pero conviene hacer algunas anotaciones en torno a esta teoría. Si de antemano se ha establecido que los juicios aritméticos son sintéticos, podrá encontrarse sin duda la explicación de este hecho en la naturaleza intuitiva del número. Pero admitiendo que éste proceda, al menos en parte, de la intuición, ¿puede concluirse de ahí que los juicios aritméticos sean sintéticos? Veremos que no. El carácter sintético del juicio no depende de la naturaleza de los conceptos ni de su origen, y sabemos que según la propia tesis de Kant pueden obtenerse juicios analíticos a partir de conocimientos empíricos como aquellos de *cuerpo* y de *oro* que son producto de una síntesis intuitiva. Poco interesa que la intuición en que descansa esta síntesis sea empírica, mientras que el número se base en una

intuición *a priori*. Por lo tanto, sin lesionar la naturaleza sintética de los conceptos, éstos pueden ser sujetos de judicación analítica, fundada exclusivamente en su definición.

Podría bastar dicha observación sin necesidad de discutir la teoría kantiana del número, mas lo haremos brevemente en atención a un trabajo especial que hemos dedicado al tema.[57] Que el número implique necesariamente la sucesión es una conclusión psicológica aplicable al caso de los números pequeños. ¿No tenemos, en efecto, la intuición simultánea del 1, 2, 3, 4, 5, . . ., sobre todo cuando están dispuestos con regularidad? ¿Cómo podría representarse un triángulo si no porque se tiene la percepción simultánea de sus tres lados y sus tres ángulos? ¿Cómo los ciegos podrían distinguir al tacto las letras del alfabeto Braille que no percibiendo simultáneamente los puntos que componen cada letra? Todas estas consideraciones no tienen valor en la cuestión epistemológica que nos ocupa; no se trata de saber cómo adquirimos la conciencia de un número sino en qué consiste el concepto de ese número. Ahora bien, en esta noción no tienen cabida las apreciaciones psicológicas, ni simultáneas ni sucesivas. Desde el punto de vista lógico es necesario decir que tenemos conciencia simultánea de todas las unidades de un número

para afirmar que pensamos ese número y expresar qué número pensamos. Hacer intervenir al tiempo en la noción de número es confundirla con la operación de numerar, con el acto de conteo. Pero es fácil darse cuenta que la numeración presupone la idea de número, lejos de engendrarlo, y que, en todo caso, aun suponiendo que la idea de número fuera posterior a la de numeración, en el número nada tiene que ver el tiempo empleado en la operación, así como en un edificio terminado ya no interesan los andamios que ayudaron a su construcción.[58] Por lo demás, el argumento psicológico que discutimos sí puede aplicarse a todas nuestras ideas y conocimientos puesto que es la forma general no sólo de la sensibilidad sino de toda la actividad espiritual; todos nuestros actos, hasta los más elevadamente intelectuales, transcurren forzosamente en el tiempo. Cualquier obra es justamente el producto sucesivo de una síntesis que puede ser de bloques de piedra o elementos de cualquier naturaleza que, una vez terminados, se independizan de la duración que se empleó en elaborarlos. Asimismo, un razonamiento puramente lógico requiere del tiempo para efectuarse en el espíritu. Pero de ahi no se sigue que continúe siendo una síntesis intuitiva y temporal. Se dirá que la síntesis intuitiva del número se efectúa en el espacio y no

en el tiempo; o más bien en el espacio que en el tiempo, y esta interpretación, aunque contraria a la teoría del esquematismo, podría apoyarse en los pasajes anteriormente citados de la Introducción y de los *Prolegómenos* en que el número es presentado como esquema espacial y no como esquema temporal.

Pero esta tesis no sería más sólida que la anterior, pues en la misma forma que se han mostrado objetos intemporales pueden señalarse objetos inespaciales, como los conceptos y también los números. Por otra parte, ello acabaría de señalar el problema, pues según Kant el espacio no puede ser percibido sino en el tiempo. Sostiene que el espacio es una magnitud extensiva como, por ejemplo, la representación del todo, que sólo es posible por la representación previa de las partes (B 203).[59] Las magnitudes extensas serán apreciables por síntesis sucesivas de sus partes (B 204) y Kant repite la misma tesis respecto de las magnitudes continuas: la síntesis (de la imaginación productiva) que las engendra es un proceso en el tiempo (B 212);[60] de consiguiente, tanto el espacio como el tiempo son magnitudes continuas (B 211). ¿Qué decir de ello sino que las magnitudes espaciales y el espacio mismo sólo pueden ser aprehendidos a través del tiempo? El mismo Kant afirma que la geome-

tría reposa en la síntesis sucesiva de la imaginación productora en la generación de las figuras (B 204). Por ejemplo, no podemos representar una línea sin obtenerla del pensamiento y, por consiguiente, sin engendrarla en el espacio (B 203). Este ejemplo basta para calificar toda la teoría, que consiste en confundir, a la manera de los empiristas, las ideas geométricas con las imágenes subjetivas que son el soporte genético. La idea de línea es tan independiente de la imagen psicológica como de la figura sensible que yo trazo en el pizarrón para representarla. Con el mismo derecho que se afirma que una línea tiene cierta duración puede sostenerse que es de tinta china o de carbonato de calcio. [61]

La teoría del esquematismo origina, pues, muchos problemas. Sabemos que esquema es "la representación de un proceso general de la imaginación para darle a un concepto su imagen" (B 179, 180). Kant distingue el número, como esquema de la magnitud, de la imagen que se le construye con ayuda de puntos (B 179). El pensamiento de un número particular "es la representación de un método para representar una multitud (por ejemplo, mil) conforme a un cierto concepto en imagen, más bien que la imagen misma, sin el cual sería difícil de comparar con su concepto" (B 179). Pero, ¿qué es este concepto

sino la noción del número 1000? ¿Y qué tiene que hacer el esquema entre el concepto y su imagen? Si es un producto de la imaginación deberá confundirse con la imagen misma, y si es un método general de construcción no tiene por qué diferir del concepto; en todo caso, no vemos cómo puede facilitar la comparación y la aproximación del concepto y la imagen.

Por otra parte, si el número es el esquema de la magnitud, parece que el concepto en el cual consiste el número debe ser también concepto de una magnitud. Pero, ¿qué hace que el número represente esa magnitud y no otra? Se trata de una relación de cierta magnitud con la unidad de magnitud de la misma especie, que se toma libremente como unidad; por ello, en la noción de magnitud no hay nada que indique necesariamente la presencia de un esquema, pues podría tener otro cualquiera y, además, si la magnitud es un concepto y sólo puede ser esquematizado en el número, ¿qué sucede con la teoría kantiana según la cual toda magnitud es intuitiva e implica necesariamente la forma del espacio y del tiempo? ¿Cuál es la relación del número en tanto esquema, con los "esquemas" de las figuras geométricas? Se dirá que el número es un esquema temporal mientras que los esquemas geométricos son espaciales; pero Kant admitió que el núme-

ro 5 tiene por imagen cinco puntos alineados y generalizando este método de construcción se obtendrá un esquema particular del número 5. Como, por otra parte —según Kant—, la construcción de las figuras geométricas es sucesiva, también los esquemas geométricos implican forzosamente la participación del tiempo. No vemos con claridad lo que distingue al número de los esquemas geométricos, y con ello se pierde la distinción que podría establecerse entre la aritmética y la geometría, atendiendo a su objeto y su método. Sin embargo, todo el mundo se da cuenta de esta diferencia; los números son más abstractos, más puros, y tienen un carácter universal. Todo obedece a las leyes del número, en tanto que no todo cae bajo la jurisdicción de la geometría. En resumen, si el número fuera esquema, no podría serlo ni del número ni de la magitud. No puede ser realmente un esquema.

El número y la magnitud

No es fácil representarse claramente la idea que tuvo Kant sobre la magnitud y sus relaciones con el número. En principio, la magnitud es una categoría o sea un concepto *a priori* del entendimiento; [62] su esquema es el número, y el

espacio, su imagen (B 182). El número sería entonces un punto intermedio entre la magnitud y el espacio, el vehículo que proyecta la acción de aquélla en éste. Pero el concepto de magnitud, como todas las categorías, tiene valor objetivo solamente aplicándolo a los datos de una experiencia, es decir, a la intuición. Es necesario entonces "investigar los conceptos sensibles" y para ello sirven los esquemas. Según Kant, el concepto de magnitud busca su base y sentido en el número, y éste a su vez en los dedos, en las esferas del ábaco, en los puntos o las líneas de una figura (B 299). Parece, por consiguiente, que no puede pensarse a la magnitud sino a través del número y por cierto del número entero y positivo, que es esencialmente discontinuo. En cambio, no podría concebirse de ninguna manera a la magnitud como discontinua, y en efecto, según Kant, puédesele definir únicamente diciendo que es la determinación de una cosa por la cual se piensa cuantas veces la contiene el número (B 300), y agrega que el "cuantas veces" reposa en la sucesiva repetición permisible en el tiempo, y más bien, en la síntesis de lo homogéneo en el tiempo (tal es el número). Preguntamos entonces cómo se hubiera podido llegar a la noción de magnitud continua pues, o bien el número "imita" a la magnitud —para emplear la

expresión de Pascal— y entonces puede explicarse la generalización del concepto de número (números fraccionarios, negativos, irracionales, etcétera), suponiendo que tenemos una noción primitiva y original de la magnitud (independiente del número),[63] o bien que la propia magnitud puede pensarse por medio del esquema, es decir, del número. Entonces, para explicar la continuidad de la magnitud hay que definir los números fraccionarios, negativos e irracionales, de una manera independiente, sin apelar a la idea de magnitud ni tampoco a la intuición espacial. La segunda alternativa es perfectamente posible[64] pero constituye una refutación de la tesis kantiana porque erige a toda la matemática sobre fundamentos analíticos y obliga, por lo menos, a abandonar la concepción empirista del número, según la cual éste debiera siempre estar encarnado en grupos de objetos visibles y palpables, dado que tal concepción no permite ir más allá de los números cardinales, enteros y positivos.

En todo caso, dicha teoría permite considerar que la noción de magnitud es en sí independiente y distinta del espacio y del tiempo, puesto que ambas formas de la intuición pueden proporcionarle únicamente imágenes o esquemas[65] La matemática es —según Kant— la ciencia de la magnitud en general, independiente del espacio

y del tiempo; no descansa propiamente en la intuición sino en el concepto *a priori* de magnitud. Otro tanto puede afirmarse del número, puesto que, siendo el número un elemento que actúa en el espacio y en el tiempo, a través de esquemas apropiados, es en sí mismo un concepto distinto e independiente de ambas formas de intuición y puede verse "construido" tanto en una como en otra. Concluiremos, pues, que las ciencias del número y la magnitud son ciencias racionales e independientes de la intuición.

Kant mismo consideró repetidas veces al número como un concepto intelectual, no sólo en su *Dissertatio* de 1770, que podría ser ampliamente refutada[66] sino en la misma *Crítica de la razón pura*. En efecto, dice así: "La síntesis pura, representada de una manera general, proporciona el concepto intelectual puro. Pero entiendo por esta síntesis a la que descansa en un principio de unidad sintética *a priori*. La numeración (esto se nota sobre todo en los números grandes) es una *síntesis según los conceptos* porque tiene lugar por un principio de unidad común (por ejemplo, el sistema decimal)" (A 78 B 104). Este pasaje parece implicar que el número, producto de una síntesis pura, es un concepto intelectual puro, lo cual contradice la teoría del esquematismo. Podría explicarse este hecho no-

tando que estas líneas son anteriores al capítulo del esquematismo; sin embargo, en el pasaje habla Kant del papel de la imaginación y le atribuye el lugar común de todas las síntesis en general (B 103). Esto es más notable porque en el mismo pasaje considera al número como producto de una síntesis intelectual y no imaginativa, que nada tiene que ver con la intuición (del tiempo) que, según el esquematismo, sirve de base o materia a dicha síntesis. [67]

El álgebra

Kant reconoce, pues, que la matemática no tiene por objeto sólo a las magnitudes concretas, como las que estudia la geometría, sino también a la magnitud pura que hace abstracción de todo objeto; tal es el oficio del álgebra (B 745). Parece admitir que la magnitud es algo superior a las formas de la intuición, en tanto intelectualidad pura, lo cual implica que espacio y tiempo no sean las únicas magnitudes originarias (B 753). Trata de salvaguardar su tesis sosteniendo que el álgebra también se origina por construcción de conceptos, pero no una construcción "ostensiva o geométrica" que se proyecta en objetos, sino construcción "simbólica o ca-

racterística" que se manifiesta en los signos algebraicos (B 745, 762). Esta es una exageración, pues admitiendo que sea indispensable representar los conceptos por medio de signos, no puede llamarse a esto una construcción de conceptos ni concluir de ahí que son de naturaleza intuitiva.

Con ello se confunde al signo o símbolo con su significado. [68] También pueden representarse las relaciones lógicas por signos análogos a los algebraicos, como en la llamada "álgebra de la lógica"; pero de aquí no se concluye que sólo puedan ser pensados por medio de la intuición. Kant mismo construye simbólicamente la fórmula $A + B$. ¿Puede concluirse de ahí que sea una síntesis intuitiva? El filósofo refuta su propia teoría llevándola al extremo y, según ella, no existe noción ni relación alguna que escape a este fundamento intuitivo, puesto que todas las ideas se traducen en palabras que son, a su vez, signos visibles o audibles. ¿Puede concluirse que todas las ideas se "construyen" en el espacio y el tiempo?

Kant distingue las palabras de los signos algebraicos, al afirmar que en filosofía no se razona sobre las palabras; pero entonces, ¿por qué pretende que el álgebra razone sobre signos, dejando de lado los objetos que constituyen el significado de los símbolos y determinan el sentido

del razonamiento propiamente dicho?[69] Kant sufre una confusión; no es cierto que el álgebra razone sobre signos y sí sobre las ideas que representan; operar mecánicamente con ellos es a condición de haber justificado previamente las reglas formales que rigen las operaciones algebraicas, lo cual es posible atendiendo al sentido real de tales operaciones y a los signos que se relacionan con ellas. En cierto sentido se hace abstracción de la naturaleza de los objetos, pero ello se debe a que no importa a la esencia misma del razonamiento algebraico. Por ejemplo, no interesa saber si las letras representan números enteros o fraccionarios, así como en aritmética pura no importa si un número representa un grupo de objetos, una longitud o un peso; ni en geometría si un sólido está hecho de madera o de metal. Por lo demás, el método de abstracción es general a toda la ciencia y gracias a él es posible permanecer únicamente con el aspecto del objeto que interesa a la investigación. Lo que no podría hacer el álgebra es abstraer al número o la magnitud, que es su objeto propio y contenido mismo de las fórmulas; y cuando en un problema algebraico se hace abstracción de la naturaleza particular de las magnitudes que se manejan, no es para vaciar a los símbolos y las fórmulas de todo contenido sino para reducirlas

precisamente a su contenido esencial, que es en general la idea de magnitud.

Kant atribuye al "cálculo literal" (como denomina impropiamente al álgebra) una cierta virtud de infalibilidad, y deberíase a que el razonamiento contiene únicamente signos sensibles que se graban en la memoria y hacen imposible toda omisión. Las palabras, por el contrario, no proporcionarán igual servicio porque pueden ser expresadas sin pensar en su sentido y, por consiguiente, hay siempre una posibilidad de confundir o alterar su significación. Es cierto que las ventajas del simbolismo algebraico son reales, pero no constituyen un argumento en favor de la tesis kantiana, y prueba es que fueron admitidas por pensadores racionalistas como Descartes y Leibniz. El último, sobre todo, consideraba el cálculo algebraico en tanto método infalible que podría extenderse a todo género deductivo y constituir una caracterología universal para resolver cualquier tipo de problemas. Leibniz se dio cuenta, aun mejor que Kant, del auxilio que recibe el pensamiento por los signos "cómodos y apropiados", sin caer por ello en el nominalismo y reducir el álgebra, la matemática y la lógica misma, a un puro juego de símbolos, carente de sentido. La superioridad del cálculo algebraico sobre el razonamiento predicativo no consiste en

que razone aquél sobre signos y éste sobre ideas, sino precisamente que en el cálculo algebraico los signos corresponden a ideas claras y definidas, mientras que en el razonamiento predicativo —que emplea palabras— intervienen ideas confusas y equívocos producidos por su uso vulgar.

El signo es simplemente un medio de identificar un concepto preciso y rigurosamente definido; la palabra podría hacerlo también, siempre que su sentido se hubiera definido con precisión y que nunca se le atribuyera ningún otro. Así pues, no es necesario atribuir a los signos una virtud casi misteriosa que preserva de todo error, pues se cometen errores en el cálculo tanto como en el razonamiento, lo cual, sin embargo, no desmerece su teórica infalibilidad. Lo más extraño es ver que Kant hace consistir, como un simple empirista, a la "evidencia" en la "certeza intuitiva", acudiendo al testimonio de la vista para "preservar a todas las deducciones del error" y reconocer como demostrativas únicamente a las que se apoyan en la intuición. Puede tratarse, bien de una simple cuestión de palabras donde se maneje arbitrariamente el término "demostración", o puede ser un auténtico error, porque no se negará que existen demostraciones puramente lógicas e intelectuales, y no sería Kant, ciertamente, quien llegara a sostener, por ejemplo, que el valor del silogismo está fundado en la intuición.

Los juicios de la geometría

Réstanos comentar el pensamiento de Kant sobre la geometría. Si hay una ciencia que parezca descansar en la intuición es ella precisamente, en tanto ciencia de lo espacial, y hasta los matemático-filósofos que consideran el análisis como una ciencia pura y *a priori*, opinan que la geometría es ciencia empírica, o al menos de base intuitiva. Ello parece indicar que puede separarse a la geometría del tratado general de las magnitudes.

Kant emplea nuevamente ejemplos y comparaciones en su ensayo demostrativo y nosotros, por consiguiente, deberemos examinarlo. Así, para mostrar que los juicios geométricos son sintéticos, cita esta proposición: "La línea recta es la más corta que une dos puntos." "En efecto —dice él— mi concepto de recta no contiene nada de cuantitativo sino exclusivamente una cualidad. El concepto cuantitativo de 'la más corta' no puede estar contenido en el sujeto ni ser obtenido analíticamente de él y sólo se le atribuye por una síntesis

fundada en la intuición." ¿Qué validez metódica tiene esta aseveración? ¿Es una definición, un axioma, o un teorema? Parece más bien un axioma, puesto que lo califica de "principio" (Grundsatz).[70] Sin embargo, no es absolutamente axioma sino un teorema demostrable y demostrado.[71] No puede ser un principio ya que el enunciado supone la noción de longitud de una línea cualquiera; ahora bien, la longitud de una línea curva se define únicamente en el seno de la geometría analítica y del cálculo, y por cierto, *en función de la línea recta.* La recta es pues, el prototipo de las longitudes, *por definición.* Kant se coloca en el punto de vista del empirismo ingenuo, que *cree ver* la longitud de una curva, porque se *imagina* un hilo tenso aplicado sobre esta curva, pero tal intuición no interviene como principio científico en geometría, puesto que el hilo conserva íntegramente su longitud aunque se deforme su primitiva posición recta. De ahí vemos que todo llamado a la intuición conduce en geometría a un círculo vicioso.

No puede afirmarse que la línea recta constituya en sí primitivamente una cantidad; en todo caso, no es la línea recta (ilimitada) lo que puede ser una cantidad, sino el segmento finito que se toma de ella.[72] Tampoco podemos decir que la línea recta sea una cualidad, como el color rojo o el calor, y cuando mucho, según la lógica gramaticista (tal es la lógica de Aristóteles), diremos que la rectitud de la línea es una cualidad y que la recta es el sujeto de esta cualidad. Pero ciertamente las categorías escolásticas carecen de sentido si se aplican a la ciencia geométrica. En realidad, la línea recta es una figura, según la geometría proyectiva (a la cual se le puede llamar también cualitativa) y considerada en su totalidad es absolutamente infinita y comprende todos los puntos situados en su dirección. No es pues una magnitud, pero actúa como soporte de una serie de magnitudes (las longitudes) desde el momento que fijamos dos puntos sobre ella y definimos sus relaciones, llamadas *distancias.* Después diremos, por ejemplo, que si el punto B está entre A y C, la distancia AC es mayor que las distancias AB y BC y que constituye su suma. Culminando estas definiciones de desigualdad y de suma, las distancias se hacen magnitudes mensurables. ¿Se trata de una síntesis de cualidad y cantidad? Por lo menos puede afirmarse que es la definición de una especie de magnitudes. Y como en este concepto no queda definida la línea recta en cuanto tal (en su infinitud y su unidad indivisible y funcional), para decir que es "la más corta" se necesita tomar un segmento de recta limitado por dos puntos[73] y

cuando se concluye que este segmento es más corto que toda línea ondulante o quebrada que tenga los mismos extremos, se ha comparado, en el fondo, un segmento de recta a otro segmento de recta, diciendo que aquél puede estar contenido en éste. La relación de desigualdad ("mayor que") se encuentra definida por la relación del todo a la parte y el teorema en cuestión se produce cuando la aplicamos. La proposición "el todo es mayor que la parte" fue considerada por Kant como un principio analítico y el teorema "en un triángulo la suma de dos lados es siempre mayor que el tercero" no podrá deducirse de los conceptos de línea y triángulo (B 39).[74] En ello tiene Kant perfecta razón, pero en realidad no necesitaba apelar a los conceptos de línea y de triángulo, pues el mismo teorema podría formularse así: "Dados tres puntos cualesquiera, la distancia entre dos de ellos es menor que la suma de sus distancias al tercer punto."

En su opúsculo sobre los *Progresos de la metafísica* (1791) pone Kant como ejemplo de juicio sintético el siguiente: "Toda figura de tres lados tiene tres ángulos; porque al pensar en tres líneas rectas que recortan un espacio, es imposible no pensar al mismo tiempo en tres ángulos, aunque el concepto de la trilateralidad no me lleve necesariamente al de la inclinación de un lado

con respecto al otro, es decir, al concepto de ángulo."[75] Como se ha hecho ver, éste es un error:[76] el concepto de ángulo está contenido en la noción de rectas que se cortan y, ¿cómo podrían cerrar un espacio si las líneas no se encontraran? Puede concebirse el triángulo a la manera clásica, definiéndolo como la figura formada por tres rectas que se cortan dos a dos y, por consiguiente, en virtud de un teorema de la combinatoria, los tres lados tienen intersecciones que determinan tres ángulos; pero también se le puede concebir como en la geometría proyectiva: un conjunto de tres rectas situadas en un mismo plano, y entonces dos de ellos —y aun los tres— pueden ser paralelos.[77] Pero aun en este caso debe admitirse que dos rectas paralelas forman el ángulo cero y, por consiguiente, tres rectas cualesquiera situadas en un mismo plano determinan siempre tres ángulos, de los cuales uno o los tres pueden ser nulos. En todo caso, la noción de ángulo está perfectamente contenida en la noción de las tres rectas, o sea en la propiedad de trilateralidad del triángulo.[78] Por otra parte, Kant pretende que del concepto de dos líneas rectas no puede concluirse que éstas no sean capaces de cerrar un espacio (B 65, 299) y olvida su propia definición de la recta, a saber, que sólo una puede pasar por dos puntos y que, por

consiguiente, dicha propiedad deriva analíticamente del concepto de recta.[79] Asimismo, él afirma que el juicio "tres puntos que deben estar situados en un mismo plano" es sintético (B 761), siendo que este concepto de tres puntos es la definición misma del plano. Todos esos ejemplos demuestran que la distinción de juicios analíticos y sintéticos no estaba suficientemente clara en Kant ni su examen de la geometría y la aritmética.

Las demostraciones geométricas

Para probar que las demostraciones geométricas descansan en la intuición, Kant considera un teorema conocido: "La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos."[80] Y afirma que para demostrarlo se requiere una construcción que consiste en elaborar tres ángulos iguales a los del triángulo y probar que la suma es igual a dos rectos (B 744).

Parece, pues, que según Kant no se puede comprobar un teorema geométrico sin construir una figura por medio de líneas auxiliares y que toda construcción implica necesariamente un llamado a la intuición. Pero ninguna de esas proposiciones está justificada. Una demostración

geométrica no recibe validez del auxiliar intuitivo que nos hace "ver" las propiedades aparentes de la figura. Esto lleva inclusive a sofismas.[81] En cuanto a las construcciones auxiliares, los trazos de que constan deben apoyarse en una justificación lógica de su ubicación.[82] Cuando se habla de construir tal o cual figura se echa mano de una metáfora más o menos práctica, de un elemento sensible; las figuras trazadas empíricamente tienen previa validez ideal, determinada por los datos y condiciones del problema. Cuando decimos: "Únanse los puntos *A* y *B*" se significa en realidad: "Los puntos *A* y *B* determinan una recta en virtud de la definición misma de recta." Decir: "Prolonguemos la recta *AB*", es referirse al accidente empírico de una figura trazada materialmente sobre la recta *AB*, que es esencialmente infinita. Y también, cuando dadas dos rectas ortogonales se habla de trazar por una de ellas un plano perpendicular a la otra, no se hace más que realizar lo ya implicado hipotéticamente, puesto que dos rectas son ortogonales por definición cuando una de ellas está contenida en un plano perpendicular a la otra (se demuestra que esta propiedad es recíproca) y por consiguiente, aquel plano ya existía por definición. En todos los casos sucede igual; no puede construirse, y que sea válida, ninguna figura sin es-

tar previamente determinada por su definición, construirla es sólo realizar empíricamente elementos presupuestos en una figura ideal y como precisamente a la figura ideal se refieren los razonamientos geométricos, construirla no significa agregarle nada sino hacerla únicamente accesible a la sensibilidad en una fòrma pragmática y aproximada. Es como si se repasaran con tinta los trazos de una figura dibujada tenuemente con lápiz, y así todas sus propiedades "por construcción" lo son realmente "por hipótesis" o "por definición".

De allí, aunque las construcciones fueran indispensables, no exigen acudir a la intuición. Pero realmente no son tan indispensables como se cree. Desde hace mucho tiempo se critica el carácter artificial de las demostraciones de Euclides [83] porque se apoyan en construcciones muchas veces complicadas y en apariencia arbitrarias, empleando un gran andamiaje de líneas auxiliares que parten de la figura dada y constiuyen elementos extraños a ella. Esto da la impresión de que no puede llegarse a demostrar una hipótesis sino por medio de grandes rodeos y esfuerzos de la imaginación; tales demostraciones no parecen realmente razonamientos lógicos y concatenados sino aventuras de la imaginación. [84] Generalmente se les puede substituir por demostra-

ciones más simples y directas, fundadas en propiedades intrínsecas de la figura dada que no exigen ni un solo trazo de líneas auxiliares. Y si se trata de dar ejemplos, podremos citar una demostración de ese tipo. La hemos obtenido de un texto elemental, pensado sin ningún espíritu de sistema e inspirado únicamente en la idea del rigor lógico y la claridad pedagógica: [85] "Cuando dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a su intersección en un punto es perpendicular al otro". Se demuestra con la siguiente consideración: "Esta recta puede ser considerada como la intersección del primer plano con un tercero que sería perpendicular a la interesección de los planos dados (95) y, por consiguiente, perpendicular al segundo (107, 111)."

La demostración, expresada en una frase, no requiere de intuición alguna; no está acompañada de figuras y, como se ve, tampoco reclama construcciones, refiriéndose simplemente a tres postulados previos que es necesario conocer:

95. Por un punto de un plano que contiene una recta, sólo puede trazarse una perpendicular a esta recta, y la perpendicular es intersección del plano dado con el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto.

107. Dos planos son perpendiculares cuando uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.

111. Cuando dos planos que se cortan son perpendiculares a un tercero, su intersección es perpendicular.

Volvamos ahora a la demostración citada. La hipótesis comprende los siguientes aspectos: dos planos perpendiculares, que pueden ser *P* y *Q*, la recta *D*, su intersección, y la recta *E* perpendicular a *D* en el plano *P*. La recta *E* es (en virtud del enunciado 95) la intersección del plano *P* por un plano *R* perpendicular a la recta *D*. Pero (de acuerdo con el 107) el plano *R*, perpendicular a una recta *D* del plano *Q*, es perpendicular a *Q*. Los dos planos *P* y *R* son perpendiculares a *Q* y así pues, su intersección *E* es perpendicular a *Q*. Esto es lo que se quería demostrar.

Nos abstenemos de trazar una figura porque no es necesario *ver* los planos *P*, *Q*, *R*, y las rectas *D*, *E*. Basta conocer sus relaciones para aplicar automáticamente, por así decirlo, la definición de los números 95, 107 y 111. Esta es una demostración verbal, es decir, formal. Podríamos despojar de toda significación geométrica a los elementos *D*, *E*, *P*, *Q*, *R*, e igualmente de sus relaciones de perpendicularidad y correspondencia. El razonamiento sería el mismo y tendría la misma validez con tal que las tres proposiciones 95, 107 y 111 fuesen verdaderas.[86] El ejemplo demuestra que una proposición geométrica puede verificarse de un modo puramente lógico y deductivo. Conviene añadir que el teorema en cuestión no es un mero corolario (consecuencia inmediata de otro teorema) y que la demostración que acabamos de citar no constituye excepción, pues la gran mayoría de los teoremas que componen esa obra tienen análogo carácter y no necesitan recurrir a la figura ni a la construcción intuitiva.

La intuición en geometría

Kant repite con frecuencia que la matemática es consideración de lo general en lo particular, y también en lo singular y concreto; pero no creemos correcta esta opinión. Aun en la geometría sintética, a la cual parecería aplicarse, cuando se traza una figura para demostrar un teorema no se razona jamás sobre las propiedades particulares de la figura y sí en cambio sobre sus propiedades generales, que son comunes a las figuras del mismo género, comprendidas y definidas por el teorema.[87] Para nada se requieren las propie-

dades intuitivas de la figura particular que se considera; sólo las propiedades que resultan de su definición o de su construcción, es decir, de las hipótesis del teorema. Dice Kant que la matemática representa *"lo general en concreto* (en la intuición singular) ... donde todo mal razonamiento se hace visible" (B 773). Aquí hay un equívoco. Si se trata del método algebraico, hay razón en decir que los signos sensibles preservan del error, como Leibniz lo había hecho notar. Pero si se trata del método geométrico, las figuras no sólo no preservan sino que al contrario, conducen al error, pues la pretendida "evidencia" intuitiva puede disimular la debilidad de un razonamiento o de un postulado. Esto prueba de paso, que ambos tipos de intuición no se parecen, y así, la intuición geométrica no es de ningún modo una garantía de verdad y menos de rigor lógico. Se puede razonar adecuadamente sobre una figura inexacta y por consiguiente falsa, y en cambio se puede mal razonar sobre una figura bien construída si se invoca una propiedad auténtica, pero empírica, es decir, no emanada de las definiciones o de hipótesis. ¿Qué significa esto, sino que la intuición no debe participar de manera fundamental en los razonamientos geométricos y que éstos para ser rigurosos deben ser puramente lógicos? Un llamado a la intuición (aun la pretendi-

da intuición *a priori*) no se distingue ciertamente de un dato empírico ni tiene más valor que él. Se puede determinar el número π midiendo el contorno de un círculo material; se dice que Arquímides encontró la cuadratura de la parábola pesando cuerpos recortados conforme a esta curva; pero tales procedimientos son evidentemente extraños al método matemático y no más, por cierto, de lo que viene a ser un apoyo en la intuición. [88]

Se dirá que los razonamientos geométricos no se refieren a imágenes, sino a esquemas, y esto parecería resolver la dificultad puesto que mientras las imágenes son particulares los esquemas son generales como el concepto mismo; Kant sostiene que nuestros "conceptos sensibles puros" (es decir, los conceptos geométricos) descansan en los esquemas y no en imágenes, porque ninguna imagen puede adecuarse al concepto de triángulo ni representar su generalidad (B 180). Por otra parte, la teoría es difícil de conciliar con el repetido aserto de que la matemática construye sus conceptos *in concreto* (B 743) y considera lo general en lo particular y aun en lo singular (B 742). Sin embargo, leemos en este sentido: "La figura singular que yo puedo trazar es empírica y sin embargo sirve para expresar el concepto, a pesar de su generalidad, porque en

esta intuición empírica sólo se atiende al acto de la construcción del concepto, indiferente a toda clase de determinaciones, como la magnitud de los lados y los ángulos; por consiguiente, se hace abstracción de las propiedades que no alteran el concepto de triángulo" (B 742). Este pasaje prueba que Kant vio la dificultad, mas no la resolvió. [89] Una de dos: o bien se razona sobre la figura singular (no importa que esté dada en una intuición *a priori* o empírica) y entonces el razonamiento carece de generalidad, o bien se razona sobre el esquema general cuya imagen está dada en la figura, pero entonces ya no podrá sostenerse que la matemática considera a lo general únicamente en lo particular y lo concreto. Tampoco podrá afirmarse que la matemática hace consideraciones intuitivas, pues un esquema significa método general, regla de construcción y no construcción acabada, que sería, según Kant, "un objeto singular" (B 741) que no se distinguiría en nada del concepto de cuya generalidad participa, abstrayendo las características particulares que hacen posible la intuición. [90] Es el concepto mismo quien constituye la regla general de construcción, considerando sobre todo que los conceptos geométricos no son definidos *per genus et differentiam*, sino *per generationem*. Todo producto de la imaginación es particular y no podemos imaginar un triángulo sin asignarle una forma determinada. Si el esquema es general, no puede ser un producto de la imaginación. El esquema es, pues, un elemento intermedio, útil por lo menos, entre el concepto y la imagen.

En cualquier caso, si la intuición interviene a título de simple auxiliar en la geometría sintética, para nada se mezcla con la geometría analítica, y menos aún con la geometría proyectiva y los diversos capítulos del cálculo geométrico. En geometría analítica el razonamiento es conducido por medio de ecuaciones generales que representan indiferentemente a todas las figuras de una misma especie, y si de hecho se recurre a la intuición para establecer esas ecuaciones, se prescinde completamente de ella en las deducciones ulteriores. En geometría proyectiva se razona directamente sobre las figuras pero concibiéndolas de una manera general y haciendo abstracción de sus particularidades intuitivas. Se hablará, por ejemplo, de la cónica, sin especificar si se trata de elipse, de parábola o de hipérbole, y aun sin pretenderlas distinguir. Tampoco se diferencian rectas o planos paralelos de rectas o planos que se cortan, despreciándose como indiferentes los datos intuitivos en los que la geometría sintética de Euclides se basaba casi exclusivamente. Por último, en los diversos capítulos del cálculo geométrico,

las figuras son definidas como combinaciones algebraicas de puntos (elementos indefinibles) y el razonamiento se lleva a cabo por medio de algoritmos formales análogos a los del álgebra. En todas estas doctrinas no se invocan las propiedades intuitivas de las figuras ni se emplean jamás las construcciones auxiliares que son para la geometría sintética meros elementos de ilustración. Se han podido escribir tratados enteros de geometría sin una sola figura, lo cual demuestra que no se requiere indispensablemente de la intuición, y que el razonamiento no se refiere a casos y ejemplos singulares.[91]

En los *Prolegómenos* (§ 12), Kant afirma que la igualdad geométrica consiste, en última instancia, en la superposición, es decir, en un fenómeno intuitivo, y olvida que el empleo de ese método (del cual se abstienen por completo los geómetras modernos) no se limita a construir de hecho la superposición de figuras sino demuestra también, debido a qué circunstancia fue posible. Las dos figuras superpuestas son identificadas previamente en sus elementos, de manera que la superposición de referencia pueda ser deducida de esta previa identidad, que se basa en la definición misma de las figuras. Así, por ejemplo, del hecho que dos rectas tengan dos puntos comunes, se concluye que ambas rectas coincidan;

pero ésta no es una demostración intuitiva sino una consecuencia lógica de la definición de recta y así sucesivamente.[92]

Paradoja de los objetos simétricos

La famosa paradoja de los objetos simétricos podría constituir una objeción a nuestra tesis. Recordémosla.[93] Se dan figuras de tres dimensiones que son "iguales" en todos sus elementos y, sin embargo, "incongruentes", es decir, que no pueden coincidir. Así son los triángulos esféricos opuestos, las hélices a derecha y a izquierda, los dos lados del cuerpo humano, las dos orejas, las dos manos, etcétera. Según Kant, esta diferencia no puede ser definida ni explicada por ningún concepto sino únicamente por la intuición, y prueba la naturaleza intuitiva de las figuras geométricas y del espacio mismo.

Es útil recordar que esta paradoja fue invocada por Kant para probar una tesis diferente, casi contraria, como es la del espacio absoluto.[94] La diversidad de los objetos simétricos no podría explicarse por sus relaciones internas (que son idénticas) y solamente se hace inteligible relacionándolos con el espacio absoluto.[95] Así, Kant partió de un mismo hecho para comprobar primero

la realidad del espacio y después su idealidad. Esto hace presumir que en ambos casos, o al menos en uno, el argumento no es procedente. [96] Sería interesante averiguar cómo pudo Kant emplear simultáneamente un argumento en dos sentidos tan diversos; creemos explicar este hecho como una oposición a Leibniz, pues en el primer caso sostiene la tesis newtoniana del espacio y en el segundo opta por la naturaleza intuitiva del espacio para dirigirse contra el intelectualismo de Leibniz, quien veía en él un orden puramente inteligible. Pero esta cuestión histórica y psicológica se aparta de nuestro tema; lo que deseamos es saber cuál es el argumento tal y como es presentado en los *Prolegómenos.*

Creemos hallar la falla de la argumentación en la siguiente premisa: "No existen ahí diferencias intrínsecas que un entendimiento cualquiera pueda solamente concebir." Esta premisa supone que entre los elementos de las figuras no existen otras relaciones que las de magnitud. Éste es un error, pues las relaciones de orden figuran también como datos imprescindibles y son precisamente estas relaciones de orden las que distinguen, y más aún, invierten al espacio en el caso de las figuras simétricas. ¿Podría afirmarse que dichas relaciones son puramente intuitivas y lógicamente indefinibles? Todas las relaciones de

orden pueden definirse por medio de la lógica relacional. En el fondo, dos órdenes inversos entre sí corresponden a relaciones de conversión de uno a otro, y la conversión relacional es una operación lógica absolutamente independiente de la intuición. [97] Existe pues una diferencia inteligible y puramente lógica entre dos figuras geométricas; tal es lo que Kant niega cuando dice que son "iguales" en todas sus partes y en todas sus relaciones internas. Sus partes son iguales (y por consiguiente semejantes) pero no están dispuestas en semejanza; en otras palabras, todas las relaciones de magnitud son las mismas pero las relaciones de orden son inversas.

Trataremos de precisar nuestra idea. Hay que distinguir dos sentidos vectoriales opuestos en una misma recta; un sentido será positivo y su contrario, negativo. Se distinguen igualmente dos sentidos opuestos para los ángulos de un mismo plano. Dos segmentos o dos ángulos iguales (del mismo sentido) coinciden con un simple desplazamiento; dos segmentos o dos ángulos simétricos (de sentido contrario) no pueden coincidir. Lo mismo sucede con los llamados "triángulos dirigidos" (es decir, dotados de sentido) situados sobre un mismo plano. La simetría de los triedros es análoga a la de los triángulos, con una dimensión más, de manera que los triedros simétricos

no pueden coincidir con un desplazamiento en el espacio de tres dimensiones. En forma general, hay que distinguir segmentos (paralelos), ángulos (en un mismo plano) y triedros homotáxicos y antitáxicos, según que estén dispuesto en el mismo sentido o en sentido contrario, ya sea sobre la recta, sobre el plano o en el espacio. [98] Ahora bien, para transformar un triedro en su antitáxico, basta cambiar el sentido de uno de sus lados, lo cual equivale a reemplazar una semirecta por su opuesta mediante un cambio de signo en uno de los ejes. La antitaxia puede definirse por la simple distinción de los dos sentidos de un segmento y reducirse a la oposición de segmentos positivos y negativos sobre una recta. Que esta oposición no es un dato del espacio intuitivo, debió ser evidente para el autor del *Ensayo de introducción al concepto de las magnitudes negativas en la filosofía* (1763), desde el momento en que pretendía reducir todas las oposiciones reales, aun las psicológicas (como el placer y el dolor) y las morales (lo bueno y lo malo) a la oposición de magnitudes positivas y negativas. Así pues, si la paradoja de Kant prueba algo, es que el espacio constituye el *substratum* de las relaciones de orden y que, por consiguiente, no es una magnitud pura sino precisamente un orden,

lo cual es en el fondo la misma tesis de Leibniz que Kant creyó refutar. [99]

El problema anterior debe ser distinguido de este otro, que se relaciona con él: [100] "¿Por qué el mundo real tiene un sentido determinado y no precisamente el opuesto? ¿Por qué, por ejemplo, los planetas giran de derecha a izquierda en torno al Sol?" No es posible responder a esta pregunta, porque ella misma carece de sentido, ya que el espacio es relativo y no contiene diferenciaciones cualitativas e intuitivas. Si el espacio fuera absoluto, debería existir una razón para que los planetas girasen de derecha a izquierda y no de izquierda a derecha; pero no podemos dar esa razón. [101] Por lo demás, ambos sentidos se hacen inescindibles, pues si los planetas giran de derecha a izquierda para un observador situado en el sol con la cabeza al norte y los pies al sur, girarán de izquierda a derecha para un observador colocado en posición inversa. La distinción de ambos sentidos se hace relativa a la colocación del observador, pues realmente en el universo no hay ni arriba ni abajo, ni izquierda ni derecha.

Mas si a pesar de lo anteriormente expuesto se insiste en que la diferencia de los objetos simétricos es indefinible, en vista de que para lograrlo requerimos de casos particulares y ejemplos intuitivos, responderemos que efectivamente acos-

tumbramos servirnos de los términos "izquierda" y "derecha", relativos a nuestro propio cuerpo, y que son indefinibles, sólo distinguidos por un sentimiento interno e inmediato. A todo ello daremos la razón, pero el argumento se refiere, no a la posibilidad de distinguir lógicamente las figuras simétricas, sino a los medios de que nos valemos para distinguirlas en el lenguaje, es decir, para nombrarlas con respecto a otras. En el opúsculo: *Was heisst sich im Denken orientieren?* (1786) (*¿A qué se llama orientarse en el pensar?*) Kant sostiene que no es posible orientarse, es decir, distinguir los cuatro puntos cardinales, fuera del sentimiento subjetivo de la derecha y de la izquierda, y agrega: "lo llamo un sentimiento porque estos dos lados no presentan exteriormente a la intuición ninguna diferencia sensible" (edición Hart., IV, 341). El filósofo olvida que existe una diferencia perfectamente sensible y absolutamente objetiva entre las dos semirrectas opuestas que un punto determinado separa en una recta indefinida, y es que no tienen ningún otro punto común. Tenemos aquí una distinción inteligible y clara, y no una simple distinción de sensaciones. La denominación "derecha" e "izquierda", no sirve para distinguirlas sino para nombrarlas verbalmente. De análoga manera nos servimos de las indicaciones geográficas o antropomórficas de *norte* y de *sur*, de *arriba* y de *abajo*, para designar los dos sentidos inversos de una recta (de un eje de coordenadas) o también el sentido de las manecillas de un reloj para designar las dos posibilidades de una rotación circular. Pero dos rectas de sentido inverso, dos círculos que giran en sentido inverso también, pueden coincidir y, por consiguiente, la necesidad práctica que nos conduce a echar mano de datos intuitivos para designar las figuras simétricas, significa que sólo para representarnos tales figuras es necesario recurrir a la intuición.

Principios de la geometría

La reconstrucción lógica de la geometría no es solamente una posible idealidad, sino un hecho realizado por los trabajos de la geometría contemporánea.[102] Se ha establecido ya de sobra que las demostraciones geométricas son analíticas y que la geometría puede y debe reducirse lógicamente a un grupo de postulados iniciales. Nos queda por saber cuál es el origen y valor de tales postulados. Sobre esta materia la lógica formal no está capacitada para decidir. Es seguro que los postulados de la geometría no pueden deducirse —como los axiomas de la aritmética— de los

principios de la lógica, y la prueba está en que sólo existe una aritmética, en tanto que las geometrías lógicamente posibles son muchas. Cada una de ellas se construye analíticamente sobre un conjunto de postulados que la caracterizan unívocamente, constituyendo un sistema hipotético deductivo (para seguir la expresión de Pieri), es decir, un conjunto de proposiciones lógicamente encadenadas que dependen de ciertas hipótesis y serán válidas en el caso y medida que tales hipótesis se verifiquen. Habiéndolas admitido, la lógica pura interviene en cada geometría, y desde el punto de vista lógico son equivalentes entre sí, no incompatibles, como pudiera pensarse. Si todas ellas, con su diferente estructura de postulados, se refirieran a un mismo espacio, podrían ser contradictorias; pero su objeto es puramente hipotético y está determinado por un sistema de relaciones formales, de hipótesis y conclusiones. Las hipótesis son postulados; ahora bien, no pueden considerarse como tales las proposiciones concretas que son formuladas en cada geometría. Las hipótesis son libres postulados que hacen de la geometría una parte de la matemática pura en tanto ciencia deductiva y exclusivamente analítica; con este criterio, las geometrías construyen sus espacios ideales y meramente posibles, y, cosa rara, la geometría moderna es la realización de

aquel ideal que Kant previó y definió escasamente a los veintitres años de edad, en su primera obra, cuando estaba notablemente influido por la filosofía de Leibniz: "Una ciencia de todos los espacios posibles sería indudablemente la geometría más elevada que un entendimiento finito pueda concebir." [103]

Pero en otro sentido, la geometría deja de ser una ciencia analítica y una matemática pura cuando se le aplica a un objeto particular, al espacio actual de los objetos existentes. Y entonces sólo una geometría es procedente, una que debemos escoger entre todas las que son lógicamente posibles. Esta elección consiste en adoptar entre los diversos sistemas de postulados, uno que se verifique en el espacio actual o en el mundo real; y con esto se implica, desde luego, una fase sintética en el sentido que sobrepasa los límites de la lógica formal. ¿Qué determina esta elección? El tema da lugar a controversias; la mayoría de los matemáticos piensan que la experiencia es la indicada para mostrar cuáles postulados se verifican en nuestro mundo. Tales postulados serían entonces leyes inductivas, producto de incontables experiencias y, por consiguiente, esa geometría sería una ciencia inductiva y experimental, la primera y más abstracta de las ciencias físicas; sus juicios, según ellos

mismos, son juicios sintéticos *a posteriori*. Pero a otros parece la experiencia incapaz de decidir, entre las diversas geometrías, cuál deba ser la geometría de lo real, puesto que una misma experiencia, un mismo conjunto de hechos, puede interpretarse en los diversos sistemas que ofrece la geometría pura, y entonces la elección no es impuesta por la experiencia sino realizada por razones de comodidad. Ahora bien, como aquí no se trata de una comodidad empírica o práctica, sino de una comodidad intelectual, es de presumir que analizando más a fondo las pretendidas razones comodicias se redujeran a argumentos racionales, es decir, a juicios sintéticos *a priori*. Y lo que parece confirmar esta presunción es el carácter eminentemente racional de las dos propiedades esenciales del espacio euclídeo: primero, la posibilidad de desplazar una figura invariable sin deformarla, lo cual constituye el principio de identidad en la geometría (la misma figura puede existir en dos lugares diferentes) y segundo, la posibilidad de las figuras semejantes, lo que origina la llamada independencia de la forma y de la magnitud (la misma forma puede existir en escalas diferentes). Ahora bien, estos juicios sintéticos *a priori* no están fundados —como creía Kant— en una intuición sensible ni tampoco pura, sino en necesidades o convenien-

cias de razón, con lo cual creeemos justificar más propiamente al intelectualismo leibniziano que al intuicionismo kantiano.

Sin embargo, junto a esos postulados de carácter intelectual hay por lo menos uno que no es explicado en la misma forma, el relativo al número de dimensiones de nuestro espacio. Parece que es reductible a una especie de intuición que se impone prácticamente a todos los hombres de manera inexorable, bien sea porque proviene de la constitución subjetiva de nuestra sensibilidad o bien porque traduce simbólicamente la estructura del mundo exterior. Si hay un postulado que justifique a la teoría kantiana, es éste. No queremos decidirnos por ninguna de las dos soluciones, pues muy probablemente la intermedia sea la correcta: ciertos postulados tendrían un origen intelectual y otros un origen intuitivo; el espacio sería entonces una compleja estructura de elementos intuitivos organizados por principios intelectuales.

De cualquier manera, mientras la aritmética desmiente por completo a la teoría kantiana, ésta parece subsistir en geometría. Tal conclusión es contraria a la creencia de muchos matemáticos, quienes opinan que la creación de las geometrías no-euclídeas viene a refutar la doctrina de Kant. Dichos autores, aparentemente poco familiarizados

con el pensamiento del filósofo, creen que su doctrina implica la afirmación de sólo una geometría posible, lo cual es falso. La posibilidad y existencia de varias geometrías es más bien un argumento de las tesis kantianas en el sentido de que los juicios geométricos son sintéticos y se fundan en la intuición.[104] Russell[105] dice con justicia que la auténtica crisis de la filosofía kantiana de las matemáticas no es la geometría no-euclídea sino la reconstrucción lógica del análisis, lo que Klein ha llamado la aritmetización de las matemáticas.[106]

Las antinomias

No vamos a referirnos a la antinomia de la razón pura, porque además de haberla discutido ampliamente en otro trabajo[107] el tema que estamos tratando no se relaciona muy estrechamente con ella. Kant pensó que la antinomia de la razón pura se relacionaba con la naturaleza del espacio y el tiempo y confirmaba la tesis sobre la idealidad de ambas categorías. Pero en realidad, las pretendidas contradicciones en que la razón incurre inevitablemente en sus especulaciones sobre el mundo, provienen de una noción inexacta del infinito, alimentada por los prejuicios tradicionales relativos a esta noción.[108] Cabe de-

cir que la antinomia está ya fuera de lugar desde que la noción de infinito ha sido rigurosamente definida. Por otra parte, si bien es cierto que Kant refutó con clara conciencia los groseros sofismas del finitismo, puede admitirse también que su idea del infinito no fue clara ni unívoca,[109] pues mientras en la *Estética trascendental* considera el espacio como "una magnitud infinita *dada*" (A 25, B 39) y por cierto en una intuición simultánea, en la antinomia define al infinito por el hecho de que "la síntesis sucesiva de la unidad en la medida de la cantidad, no puede ser detenida" (A 430-32, B 458, 460).[110] De nuevo se inmiscuye el tiempo en los conceptos de número y magnitud; Kant introduce en la noción de infinitud, al elemento contradictorio que él mismo pensó refutar, por lo cual puede aplicársele la objeción que él esgrimía contra los finitistas de su tiempo (y de todos los tiempos): *Confingunt nempe talem infiniti definitionem, ex qua contradictionem aliquam exculpere possint.*[111] En todos los casos, la antinomia procede, no propiamente de las nociones de espacio y tiempo, sino de la noción de infinitud que se les aplica, por lo cual no debe concluirse de ahí la idealidad del espacio y el tiempo.[112] Según nosotros, sólo puede obtenerse una conclusión: que Kant elaboró un concepto contradictorio del infinito porque introduce

arbitrariamente la noción de tiempo en el número y en la magnitud, lo cual viene a ser una refutación indirecta de su filosofía de las matemáticas.

Conclusión

En resumen, el progreso de la lógica y la matemática en el siglo XIX ha impugnado la teoría kantiana y dado razón a Leibniz. Si Kant separa y opone la lógica y la matemática entre sí, es porque tiene una idea poco profunda de ambas. Es conocida su opinión sobre la lógica: que esta ciencia, desde Aristóteles, no ha dado un solo paso (B VIII) y no tiene ninguno que dar, pues de origen posee, según él, una perfección que atribuye a sus limitaciones. Los lógicos modernos han tenido que agregar muchísimo a esta definición. Es cierto que Kant no podía prever el resurgimiento de la lógica en el siglo XIX, pero al menos hubiera sido más comprensible con el esfuerzo de sus predecesores, es decir, de Leibniz y su escuela, que ensayaron sistemáticamente la superación del marco artificioso de la lógica aristotélica. En lugar de proseguir en este esfuerzo, con la contribución poderosa de su genio, Kant se manifestó en lógica formal como un ultraconservador, para no decir reaccionario, y se contentó con la crítica de la "falsa sutilidad de las cuatro figuras del silogismo" y la simplificación de la lógica escolástica; no pareció ver que ella necesitaba ser extendida y revisada.[113] Esto es más notorio por cuanto la lógica formal es la base necesaria de la lógica trascendental; la misma función, el mismo entendimiento, las mismas acciones —para emplear términos kantianos— constituyen los juicios y subsumen a los objetos bajo categorías, que producen, por una parte, la unidad analítica de los conceptos, y por otra, la unidad sintética de la intuición (A 79, B 104, 105).[114] Parece, pues, que el filósofo debió analizar con su característica penetración, las operaciones lógicas del espíritu y los diversos modos de deducción, según el método positivo preconizado y practicado por Leibniz; el estudio de las formas del lenguaje y del pensamiento científico. En vez de ello se satisfizo considerando a la vieja lógica escolástica en un marco cerrado y finito, con fórmulas inveteradas, adoptando la clasificación tradicional de los juicios[115] y completándola con añadiduras superfluas para darle cierta disposición simétrica.[116] Y cuando sale a luz el uso, o mejor dicho, el abuso con que fue empleado este cuadro tan rígido, cuando se le ve calcar sobre él la tabla de las categorías y la de los principios,

y desarrollar ulteriormente sus teorías en este bloque uniforme hasta convertirlo en un lecho de Procusto donde a fuerza debían todas encajar, se llega a la conclusión de que el edificio que el gran crítico admitió sin crítica como punto de partida de su sistema, y el majestuoso, muy simétrico y muy artificial de las tres *Críticas*, requiere la cimentación indispensable de una lógica moderna y verdaderamente científica. Esto equivale, en otras palabras, a que el coloso de granito tiene pies de arcilla.

Igual que sus contemporáneos, Kant concibió las matemáticas como ciencias del número y la magnitud; más estrictamente, como ciencias del espacio y del tiempo, no como una ciencia metódica formal o un conjunto de razonamientos deductivos e hipotéticamente necesarios. En realidad no se le podría reprochar el no haber previsto la ulterior evolución de la matemática hasta las modernas concepciones racionalistas, a no ser porque Leibniz había concebido desde antes con claridad, la matemática universal y especialmente el álgebra universal (que llamó "característica"), aplicable a todas las formas posibles de deducción. Pero estos vislumbres geniales fueron menos preciados y pasaron indiferentes como sueños de un utopista. En la época de Kant los principios del análisis eran obscuros, el cálculo infinite-

simal no había sido depurado de la noción misteriosa de infinitamente pequeño (que ciertos kantianos han interpretado tan extrañamente); Gauss no se decidió a admitir las "cantidades" imaginarias que constituyen ahora la base misma del análisis, y sólo hasta 1806 fue ofrecida por Argand una primera interpretación satisfactoria del tema. Mucho tiempo después se siguió preguntando si los entes paradójicos (contradictorios, en la opinión de muchos) eran "números" o "magnitudes". Y tan sólo en una forma paulatina se ha llegado a concebir que la matemática no está ligada a la naturaleza real de los objetos y sí constituye, en cambio, un método general de invención y demostración. Pero a este concepto de la matemática se ha llegado después del descubrimiento del cálculo baricéntrico de Moebius, del cálculo de las equipolencias de Bellavitis, del cálculo geométrico de Grassman, de los cuaterniones de Hamilton, de la geometría proyectiva de Staudt, de la teoría de los conjuntos, de la teoría de las sustituciones y de los grupos, del cálculo lógico de Boole, y muchos otros. Fue precisamente Boole el primero que expresó abiertamente la referida concepción, empleando el siguiente enunciado: "No corresponde a la esencia de las matemáticas ocuparse de la idea de número y cantidad."[117] Queremos afirmar por esto que

la matemática pura fue descubierta por Boole [118] cincuenta años después de la muerte de Kant, por lo cual puede excusarse perfectamente al filósofo de no haberla conocido.

En suma, todas nuestras críticas conducen finalmente al hecho de que la matemática consiguió en el siglo XIX un progreso inmenso e imprevisto, no sólo en el sentido de una mayor extensión sino en la penetración de sus temas, y como tal progreso tiene un efecto natural en la filosofía, atenerse a las concepciones matemáticas de Kant sería retrasar más de un siglo esta ciencia. Dejemos a sus discípulos la tarea de investigar los elementos válidos de la teoría kantiana del conocimiento, de la cual parece constituir una parte esencial la teoría de la matemática. [119] Es más, se ha reprochado a Kant haber tomado como punto de partida de sus consideraciones exclusivamente a la matemática, dando con ello a su lógica una base demasiado estrecha, tomando un solo modelo para la concepción de toda la ciencia racional. Y aunque este reproche nos parece justificado, no lo dirigimos en el mismo sentido que sus autores; si la base de la *Crítica* es pequeña, no será por haberla proyectado en la matemática misma, sino por una concepción insuficiente de la matemática. Sería inútil esperar nuevas teorías sobre el espíritu humano de

un estudio científico natural, pero de acuerdo con la concepción de la *Crítica,* la matemática es la verdadera lógica de las ciencias naturales y su pretensión se ajusta a su método. Por lo demás, la misma lógica debería extenderse sin cesar en el campo que presentan las nuevas teorías. Pero si una ciencia quiere ser exacta, racional y deductiva, tendrá que adoptar necesariamente el ropaje matemático. [120] La ciencia es una, como el espíritu mismo, y así como no existen apartados esporádicos en la función espiritual, tampoco existen ciencias que, apartándose de la *lógica,* dieran lugar a *otra* lógica. Lógicas hay sólo una, la lógica de la deducción, y los métodos llamados inductivos constituyen una aplicación de aquélla, pues existe una sola manera de entrelazar las verdades de modo universal y necesario. [121] Ahora bien, esta lógica no es, ni con mucho, la mezquina, pobre y estéril lógica escolástica. La auténtica lógica se desplaza paralelamente a la matemática, y es susceptible, como ella, de un progreso infinito.

Así pues, lejos de reprochar a Kant el haber sido demasiado matemático y demasiado lógico, le reprocharíamos, por el contrario, no haberlo sido suficientemente en un sentido racionalista. Es, en general, imprudente y temerario, querer ponerle límites a la razón para decirle "tú no irás más

lejos". Todos los filósofos que han ensayado de poner barreras a la ciencia o marcar sus fronteras, han tenido que ceder tarde o temprano ante el empuje del progreso científico. Es en este sentido que consideramos a la discutida máxima de Leibniz como una tesis justa: *los sistemas son verdaderos por lo que afirman y falsos por lo que niegan.* Kant trató, tal vez demasiado, de distinguir y limitar las facultades del espíritu, de acomodarlas en cajones etiquetados. Su sistema, de una simetría artificiosa, da la impresión sofocante de una construcción cerrada por todas partes; no deja lugar al incontenible progreso de las ciencias. Por lo demás, él afirmó siempre la fecundidad del espíritu humano y tuvo confianza en su poder; se preocupó demasiado de circunscribir el campo del pensamiento, de subordinar la razón especulativa a la razón práctica, y aun de limitar el saber para dar lugar a la fe (B xxx). Pero la razón ha tomado revancha rompiendo los marcos rígidos y las fórmulas escolásticas en que el filósofo creyó haberla encerrado definitivamente. [122]

NOTAS *

1 De acuerdo con la terminología de Vaihinger, designaremos respectivamente por A y B la primera y segunda ediciones de la *Crítica de la razón pura,* cuya paginación se encuentra reproducida en las principales ediciones modernas, y de mejor manera en las de Erdmann y Kehrbach.

2 *Lógica,* cap. 103.

3 Podría observarse que la alternativa no es absoluta, al menos en los términos precisos del enunciado; en efecto, entre el caso en que *B* está contenido completamente en *A*, y el otro en que está por completo fuera de *A*, está la posibilidad de que *B* no esté ni incluido ni excluido de *A*. Éste es el caso de los juicios particulares.

4 Esta observación fue hecha por Koppelmann: *Kant's Lehre vom analytischen Urteil* (*Philosophische Monatshefte*), t. xxi, pp. 65-101 (1895).

* Para respetar al original francés, se han mantenido los textos que figuran en idiomas extranjeros. (N. del T.)

5 *Commentar zu Kant's "Kritik der reinen Vernunft"*, I, 254. Por ello mismo, el gran comentador de Kant reconoce implícitamente la insuficiencia que señalamos.

6 Y, en efecto, los juicios negativos pueden transformarse en juicios afirmativos (de la misma cantidad) verificando la negación en el predicado (que, por lo demás, es realmente el que sostiene la negación). De cualquier manera debemos decir que Kant no admite esta reducción; declara, por lo contrario, que la negación lógica no se atribuye jamás a un concepto, sino a la relación de dos conceptos, es decir, al juicio (B 602). Según esta concepción debe considerarse la proposición universal negativa como la negación de la particular afirmativa y a la particular negativa como negación de la universal afirmativa. Pero entonces no puede afirmarse, como Kant lo hace constantemente, que en un juicio analítico negativo "no se salga" del concepto del sujeto, puesto que si se interpreta *Ningún A es B*, no como la inclusión del *no-B* en *A* (*Todo A es no-B*) sino como la exclusión de *A* y de *B*, no se encuentra en *A* la razón de esta exclusión. Comp. Koppelmann, *op. cit.*

7 La misma lógica formal se auxilia poderosamente de los símbolos para lograr exactitud y precisión en sus enunciados.

8 Nos abstenemos deliberadamente de discutir la definición "popular" (*Prolegómenos*, § 2) de los juicios analíticos (como juicios explicativos) y de los juicios sintéticos (como juicios extensivos) porque esto no haría más que embrollar la cuestión en lugar de aclararla. Queremos solamente recalcar que ha dado origen a paralogismos que consisten en decir que todo

juicio que extiende el conocimiento y, por consiguiente, todo juicio que constituye verdaderamente un conocimiento, es sintético. Esta opinión concuerda con la concepción que funda toda la lógica en el mero principio de identidad, y lo considera como estéril, capaz de engendrar únicamente tautologías.

9 Esta distinción fue señalada claramente por Koppelmann, *op. cit.*, y por Rudolf Seydel, *Kant's synthetische Urteile a priori, insbesondere in der Mathematik*, ap. en *Zeitschrift für Philosophie u. phil. Kritik*, t. 94, pp. 1-29, (1888).

10 Comp. Trendelenburg, *Logische Untersuchungen*, pp. 240 y ss.

11 Comp. Vaihinger, *Commentar*, I, 304.

12 *Prolegómenos*, § 2: "Cualquiera que sea el origen de los juicios y aun su forma lógica, existe entre ellos una diferencia en cuanto a contenido, según la cual son o simplemente explicativos . . . o extensivos . . ."

13 Por otra parte, es reconocido el rigorismo usado por Kant para afirmar que la lógica es independiente y está separada de la psicología (B 78, y *Lógica*, cap. I, Hartenstein, VIII, 14).

14 Esta es también la interpretación de Koppelmann y de Seydel (*op. cit.*)

15 Es de extrañar que Kant considera como analítico el juicio "el oro es amarillo" y como sintético "el oro tiene densidad 19.5". Ambas características del oro son sintéticas pero, en todo caso, la segunda es la más esencial y forma parte de la definición química. Trendelenburg había hecho notar que el peso es un atributo tan esencial para el físico como lo es el volumen para

el geómetra (Munz, *Die Grundlagen der Kant'schen Erkenntnisstheorie.* Halle, 1882).

16 Comp. Steckelmacher, *Die formale Logik Kant's in ihren Beziehungen zur transcendentale* (Breslau, 1879).

17 Esta fórmula no es la más simple posible. De $a\ b > b$ se deduce $ab \supset \Lambda$, multiplicando los dos miembros por b: el primero queda como ab y el segundo se convierte $b - b = \wedge$. Esta última fórmula es el verdadero principio de contradicción del cual el principio kantiano es sólo una consecuencia.

18 Comp. *Crítica de la razón pura* (B 190).

19 Kant afirma en la *Crítica* (B 190-191): "El concepto (contenido en el sujeto) debe necesariamente serle afirmado, puesto que lo contrario sería contradecir la naturaleza del sujeto." Esto supone que necesariamente tiene que afirmarse de un sujeto cualquiera de los dos conceptos contradictorios, lo cual supone el principio de tercero excluido: *X es A o no-A*. Ahora bien, este es un tercer principio independiente de los otros dos.

20 En la *Lógica*, §§ 36, 37, considera a ambos como juicios analíticos, unos *implícitamente* y los otros *explícitamente* (en este caso son llamados *tautológicos*). En la *Crítica* (A 594), llama *idénticos* a los juicios analíticos (Vaihinger, I, 257). Por último en sus opúsculos *Fortschritte* y *Entdeckung*, no quiere que se llamen "idénticos" a los juicios analíticos porque éstos se evidecian únicamente por descomposición del sujeto.

21 Esta definición del juicio analítico ha sido propuesta por G. Heymans; véase *Zeitschrift fur Philosophieu. phil. Kritik,* t. XCVI, pp. 161-172 (1889). También se encuentra en Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, § 3,

(1884). Esta última obra contiene una interesante discusión de la teoría kantiana de la aritmética, misma que hemos aprovechado para el presente trabajo. Por lo demás, es la única que las bibliografías relativas a Kant no mencionan.

22 Las definiciones filosóficas son analíticas porque expresan un concepto dado; las definiciones matemáticas son sintéticas porque construyen un concepto (B 758). Esta distinción no se compagina con la tesis sostenida por Kant en el mismo pasaje, a saber, que sólo la matemática tiene definiciones. Pero creemos que se trata de una cuestión de palabras.

23 No queremos decir "construye" para no producir un equívoco, dado el sentido especial que otorga Kant a ese término.

24 Se ve por qué hemos insistido en distinguir las expresiones "construir" y "fabricar".

25 Sólo hasta 1768 "descubrió" Kant que los juicios matemáticos reposan en la intuición: *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume.*

26 Vaihinger cree también que ese fue, en un momento dado, el pensamiento de Kant (1, 273). No queremos ir tan lejos nosotros y, en todo caso, no tenemos necesidad de tal hipótesis.

27 Semejante confusión fue ya revelada por Vaihinger y Koppelmann, *op. cit.* Richard Manno sostiene, con razón, que un juicio derivado lógicamente de una definición es analítico, aunque esta definición tenga su base —como todas las definiciones matemáticas— en una síntesis libre: *Wesen und Bedeutung der Synthesis*

in Kant's Philosophie, ap. en *Zeitschrift für Philosophie*, t. 94, (1888).

28 Decimos "lo definiente" y no "definición", puesto que la "definición" es propiamente la identidad de lo que define y de lo definido.

29 Esta teoría de la definición matemática fue expuesta vigorosamente por Frege, *Grundlagen der Arithmetik* (1884) y *Grundsetze der Arithmetik*, t. I, cap. 27, (1893), t. II, caps. 55-67, (1903). También ha sido formulada por Peano en su *Formulaire de Mathématiques*. Comp. Peano, *Las definiciones matemáticas*, y Burali Forti, *Sobre los diferentes métodos lógicos para la definición del número real*, ap. en la "Biblioteca del Congreso de Filosofía", t. III, (1900).

30 Hinc Mathesis pura spatium considerat in geometria, tempus in mechanica pura. Accedit hisce conceptus quidam, in se quidem intellectualis, sed cujus tamen actuatio in concreto exigit opitulantes notiones temporis et spatii (successive addendo plura et juxta se simul ponendo) qui est conceptus numeri, quem tractat arithmetica. *De mundi sensibilis et intelligibilis forma et principiis*, cap. 12, comp. R. Seydel, *Kant's synthetische Urteile a priori*. E. Fink, *Kant als Mathematiker, In Dissertatio* (Erlangen, 1889).

31 Comp. *Estética trascendental*, § 5: "Nur in der Zeit können beide contradictorisch entgegensetzte Bestimmungen in einem dinge, nämlich nach einander anzutreffen sein."

32 Además, si Kant no admite una mecánica, o cuando menos una cinemática pura, es de preguntarse cómo puede admitir una física pura que presupone directamente el concepto de materia.

33 Observación ya hecha por Michaelis, *Ueber Kant's Zahlbegriff*, Programme, Berlin, 1884.

34 Ed. Hartenstein, IV, 361.

35 Hemos hecho notar anteriormente que la teoría de Kant sobre la aritmética está plagada de preocupaciones sistemáticas que explican el prejuicio de una forzada analogía con la geometría: Michaelis, *op. cit.*; W. Brix, *Der math. Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen*, ap. en *Philosophischen Studien*, t. V y VI, (1890-1891).

36 Los kantianos suelen tener menos exigencias, y Sir W. R. Hamilton, por ejemplo, no ha vacilado en considerar al álgebra como la ciencia del tiempo puro *Essay on Algebra as the Science of pure Time* (1833).

37 Como lo ha recalcado Michaelis, *op. cit.*

38 Es importante notar que Kant pone como ejemplo una verdadera aritmética particular (mejor dicho, singular) en la cual sería más plausible su tesis. Podria suponerse entonces que la misma tesis pudiera ser válida para las proposiciones singulares y falsa para las generales, que constituyen propiamente la ciencia de los números, y por ello mismo Kant se mostró tan empeñoso e insistente en sus demostraciones. Su error consiste en tomar ejemplos concretos por demostraciones y teoremas del álgebra. A este respecto remitimos al lector a las consideraciones que hacemos del álgebra en este mismo trabajo.

39 Eso es lo que sostiene Zimmermann, *Ueber Kant's mathematischer Vorurteil und dessen Folgen*, ap. en *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien*. También Seydel, *Kant's synthetische Urteile a*

priori. En general, una ecuación matemática afirma la identidad de sus dos miembros, es decir, significa que ambos constituyen expresiones distintas de una misma idea. Es la identidad de un objeto bajo signos diversos. Comp. Frege, *Funktion und Begriff*; *Ueber Sinn und Bedeutung*, etcétera.

40 Véase la demostración formal de tal proposición:

Definiciones:

$$2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;\ 5 = 4 + 1;$$
$$6 = 5 + 1;\ 7 = 6 + 1;\ 8 = 7 + 1;\ 9 = 8 + 1;$$
$$10 = 9 + 1;\ 11 = 10 + 1;\ 12 = 11 + 1.$$

en virtud de la definición de la suma se tiene:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

así pues,

$$7 + 5 = 7 + (4 + 1) = (7 + 4) + 1$$
$$7 + 4 = 7 + (3 + 1) = (7 + 3) + 1$$
$$7 + 3 = 7 + (2 + 1) = (7 + 2) + 1$$
$$7 + 2 = 7 + (1 + 1) = (7 + 1) + 1$$

o bien: $7 + 1 = 8$
así pues,

$$7 + 2 = (7 + 1) + 1 = 8 + 1 = 9$$
$$7 + 3 = (7 + 2) + 1 = 9 + 1 = 10$$
$$7 + 4 = (7 + 3) + 1 = 10 + 1 = 11$$
$$7 + 5 = (7 + 4) + 1 = 11 + 1 = 12$$

con lo cual queda demostrada la proposición.

Se notará que hemos procedido por substitución de términos iguales, es decir, *idénticos*, de suerte que nuestra demostración es más simple y más "analítica" que ningún silogismo.

41 J. Pommer, en su obra *Zur Abwehr einiger Angriffe auf Kant's Lehre von der synthetischen Natur mathematischer Urteile* (1873), echa mano de recursos pedadógicos de la escuela primaria. Pero este argumento se vuelve en contra suya, pues en la escuela se acude a la intuición para "demostrar" la propiedad conmutativa de la multiplicación, con el empleo de ilustraciones. A pesar de estos métodos, puede demostrarse lógicamente la propiedad conmutativa sin necesidad de la intuición.

42 Observación hecha también por W. Brix, *op. cit.*

43 Esta concepción está manifiesta desde el opúsculo sobre *Las cantidades negativas* (1763), en la distinción entre razones lógicas, consecuencia del principio de identidad y razones reales, que Kant ejemplifica como sigue: "Podéis analizar tanto como queráis el concepto de la voluntad divina, y jamás se encontrará ahí un mundo existente, como si estuviera contenido en ella en virtud de la identidad." (Ed. Hart., II, 104). Se nota la evidente analogía de esta frase con las de la *Crítica* que se refieren a los juicios sintéticos (B 15, 16, 744, etcétera).

44 Si se quiere ver cómo la lógica clásica es insuficiente para explicar aun los juicios matemáticos más simples, basta revisar el opúsculo citado de J. Pommer, donde se encontrará este argumento: Que el predicado de $7 + 5 = 12$ no es 12, sino $= 12$, atendiendo a que la cópula no abarca el término "igual a" sino únicamente la partícula "es", de donde el inverso de

7 + 5 = 12 no es 12 = 7 + 5 sino "alguna cosa igual a 12 es la suma de 7 y de 5". Este comentario a la tesis kantiana equivale a una refutación por deducción al absurdo.

45 El siguiente argumento de Heymans es un derivado del de Kant: La idea de 12 no está contenida ni en el 7, ni en el 5, ni en el signo +, pues ninguna de estas nociones indica que la serie de los números naturales deba ser continuada más allá de 7 y que, por consiguiente, el número 12 exista. Seguramente, pero esta prolongación, y aun la prolongación indefinida de la serie, está implícita en la noción misma de número entero, en virtud del principio de inducción que forma parte de su definición.

46 Hemos sentido una gran satisfacción al encontrar esta misma objeción en Vaihinger, *Commentar*, I, 296, nota 1.

47 Vaihinger, I, 297.

48 También dice Kant de un juicio analítico: "Que todos los cuerpos sean extensos, es necesario y eternamente verdadero, ya sea que aquéllos existan o no..." *Entkeckung*... (Rosenkranz, I, 463).

49 Véase nuestra obra intitulada: *Los principios de las matemáticas.*

50 Esto fue observado por Leibniz en su tesis: a + a = a que se deduce desde el punto de vista lógico cuando el signo + designa adición (o multiplicación) lógica; a + a = 2a, desde el punto de vista matemático, es decir, cuando el signo + significa adición aritmética, y las dos *a* no representan el mismo número, sino dos conjuntos distintos que tienen el mismo número.

51 Massonius, *Ueber Kant's transcendentale Aesthetik* sostiene en esta obra una tesis análoga: Los juicios matemáticos son analíticos porque la intuición está contenida en los conceptos.

52 Comp. *Prolegómenos*, § 2 B: "Todas las proposiciones analíticas son juicios *a priori* aunque sus conceptos sean empíricos" (un ejemplo es: El oro es un metal amarillo). Esto prueba que el carácter lógico del juicio no depende del origen del concepto, que es siempre producto de una síntesis (empírica o *a priori*).

53 La frase "Was uns hier gemeiniglich glauben macht", puede inducir a un error que debe evitarse, pues, como lo ha señalado Vaihinger (1, 303), la frase relaciónase con el sentido del parágrafo precedente, donde se habla de los juicios sintéticos. No debe creerse que Kant declara sintéticos los mismos principios que acaba de designar como analíticos.

54 Ambos problemas han sido tratados por Whitehead, *On cardinal numbers*, sect. III, ap. en el *American Journal of Mathematics*, t. XXIV, (1902).

55 Reichardt, *Kant's Lehre von den synthetischen Urteilen a priori in ihrer Bedeutung für die Mathematik*, ap. en los "Philosophische Studien", t. IV (1888), se ocupa del método kantiano y llega a la conclusión de que el juicio $a + b > a$ es sintético porque el sujeto $(a + b)$ no contiene al predicado $> a$. Resalta el inconveniente de aplicar a los juicios matemáticos una teoría lógica inadecuada, considerándolos como juicios de predicación. Recuérdese lo que hemos dicho antes respecto de Pommer.

56 El ejemplo más notorio de la variabilidad del pensamiento kantiano en la distinción fundamental de

juicios analíticos y sintéticos, es el principio de la unidad necesaria de la apercepción, que considera como sintético en la primera edición de la *Crítica* (A 117, nota) y como analítico en la segunda (B 135, 138). Véase Koppelmann, art. cit.

57 *Del infinito matemático,* 2ª parte, libro I, § IV: *El número, el espacio y el tiempo.*

58 Esta tesis es defendida por Michaelis, *op. cit.*

59 Es difícil conciliar esa afirmación con la tesis de la *Estética trascendental,* de que el espacio es "una magnitud infinita dada" y que sus partes "no pueden ser pensadas antes que él . . . sino únicamente con él" (B 39). La misma afirmación reaparece en la "Antinomia" (B 466): "Las partes del espacio sólo son posibles en el todo y no el todo en las partes." Esta contradicción ha sido señalada también por Schroeder, *Kant's Lehre von Raume* (1894).

60 Por lo demás, no sabemos cómo esta propiedad pueda distinguir a las magnitudes continuas de las otras. La definición que da Kant de las magnitudes continuas carece actualmente de valor. Para Kant, dichas magnitudes nunca dejan de ser divisibles, pero esta propiedad de divisibilidad al infinito no basta para constituir la continuidad.

61 Podría sostenerse que el número no es producto de una síntesis intuitiva y sí de una síntesis intelectual, queriendo mantener el carácter sintético de los juicios aritméticos (y ésta parece ser la tesis de Michaelis, *op. cit.*) A tal respecto nos limitaremos a constatar que se trata, desde luego, de una idea diferente de la kantiana, donde la intuición es fundamental, y que

nosotros discutiremos aquí. Por otra parte, Kant afirma enérgicamente la imposibilidad de toda intuición intelectual, aunque no se esfuerce demasiado en demostrarlo.

62 Si la *cantidad* es considerada como categoría, independiente de la *cantidad lógica* hay que señalar, primero, que la cantidad lógica es el fundamento y origen de la cantidad matemática, y segundo, que por consiguiente ambas son de naturaleza distinta. Como la lógica clásica había dado a la cantidad de los juicios el título de "extensión" o "número", se comprende que Kant haya concluido que la extensión y el número de los juicios constituyan conceptos *a priori* del entendimiento. Este ejemplo muestra, de paso, cuál es el valor de la "Tabla de las Categorías".

63 Tal es la tesis que tratamos de comprobar en nuestro trabajo *Del infinito matemático.*

64 Igual es la teoría de Russell: todos los tipos de número son susceptibles de una definición puramente lógica.

65 En los *Prolegómenos* (§ 20), dice Kant: "Este principio: la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, supone que la línea está subsumida bajo el concepto de magnitud, que ciertamente no es una simple intuición sino, por el contrario, tiene su raíz en el sólo entendimiento . . ." ¿Cómo puede armonizar esta tesis con la afirmación de que espacio y tiempo son las únicas magnitudes originarias, y que la matemática pura se aplica únicamente al espacio y al tiempo?

66 Véase la nota inicial del parágrafo "¿Cuáles son las matemáticas puras?", del opúsculo.

67 La observación ha sido hecha por Michaelis, *Ueber Kant's Zahlbegriff*. Relativamente a la observación que hace Kant de que la tercera categoría de los cuatro grupos que figuran en la Tabla es la síntesis de las dos primeras, es de notar que el concepto de número, perteneciente a la categoría de *totalidad* (*Crítica*, cap. 11, B 111) es un concepto puramente intelectual puesto que tiene su origen en un "acto del entendimiento".

68 Seydel, *op. cit.*, sostiene, con razón, que Kant confunde aquí el proceso psíquico con el contenido lógico, y que las verdades del álgebra no se refieren a los signos, sino a las ideas que representan.

69 *Untersuchung über die Deutlichkeit*... 1ª consideración, § 2 (1764).

70 Para Legendre esta es la definición de la línea recta, mas no así para Kant, quien optó por considerar como definitoria la propiedad de la recta de que sólo una puede ser trazada entre dos puntos dados *Rechtslehre*, Introdución (cap. E).

71 Para demostrar que la línea recta es más corta que cualquier línea quebrada con los mismos extremos, se demuestra que en un triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos. Ese teorema reposa en el siguiente: "En un triángulo, al ángulo mayor corresponde el lado mayor", que, a su vez, deriva de este otro: "En un triángulo, un ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes." Todos estos teoremas se demuestran recurriendo a las definiciones de suma y desigualdad de segmentos y ángulos, pero no recurriendo a la intuición. Si tales definiciones evocan elementos intuitivos, no se restringirá con ello la necesidad de mantener una secuencia racionalista en el curso lógico de las demostraciones.

72 Zimmermann, *op. cit.*, ha hecho notar que no es "la recta la distancia más corta, sino más bien el segmento de recta comprendido entre dos puntos, el que tiene esa propiedad".

73 El postulado: "Toda línea recta puede ser prolongada", que Kant considera como sintético, es, por el contrario, una afirmación ciento por ciento analítica, puesto que la recta se concibe originariamente en su totalidad infinita. El concepto vulgar de la recta limitada tiene un origen empírico y carece de validez científica.

74 Comp. *Rechtslehre*, § 19: "Dass ich, um ein Dreieck zu machen, drei Linien nehmen müsse, ist ein analytischer Satz; da dass deren zwei aber zusammengenommen Grösser sein müssen, als die dritte, ist ein synthetischer Satz."

75 Edición de Hartenstein, t. VIII, p. 582.

76 Richard Manno, *Wesen un Bedeutung der Synthesis in Kant's Philosophie* ap. en el *Zeitschrift für Philosophie u. phil. Kritik*, t. 94, p. 2988 (1888).

77 Por otra parte, como lo ha hecho notar Michaelis, sería absurdo descomponer el concepto de triángulo en dos conceptos, el de *tres* y el de *línea recta*, como si ambos conceptos estuvieran simplemente yuxtapuestos en la definición. Pero tal es lo que hace Kant en este pasaje: "El (filósofo) puede reflexionar sobre este concepto (de triángulo) tanto como quiera, y no obtendrá de él nada nuevo. Puede descomponer y distinguir el concepto de línea recta, o el de ángulo, o el del nú-

mero tres, y no por ello llegará a concluir propiedades que no se encuentran en tales conceptos" (A 716, B 744). De parecida manera son considerados los conceptos matemáticos en la lógica tradicional. Michaelis ha observado que el método matemático escapa por completo al dominio de esa lógica y que Kant obró en este sentido bajo el influjo de prejuicios lógicos.

78 Y, dato curioso, Kant mismo pareció comprenderlo en el siguiente párrafo: "Al darle a un filósofo el concepto de triángulo... no tendrá más que el concepto de una figura cerrada por tres líneas rectas y, en ella, el concepto de igual número de ángulos" (B 744). Es más explícito aun en lo que sigue: "Suponer un triángulo y suprimirle sus ángulos, es contradictorio" (B 622).

79 Sostiene en otro lugar que no existe ninguna contradicción en la noción de una figura cerrada por dos rectas (B 268); que tal noción es sólo contradictoria con respecto de la noción de recta. En los *Prolegómenos* (resolución general del problema) cita como juicio sintético la siguiente proposición: "Entre dos puntos sólo puede trazarse una línea recta."

80 En curioso contraste, el teorema es citado con frecuencia por los racionalistas (Descartes, Spinoza) como prototipo de la certeza lógica.

81 Algunos ejemplos interesantes de sofismas están en la obra de Rouse Ball, *Recreations et problemes mathematiques.*

82 Véase, por ejemplo, en los *Elementi di Geometria* de Enríques y Amaldi, la demostración del siguiente teorema: "En todo triángulo un ángulo externo es mayor que cualquiera de los ángulos internos no adyacentes" (Bologna, 1903).

83 Arnauld, en la *Logique de Port-Royal* (IV, 8) somete el método euclídeo a una crítica severa y en sus *Nouveaux éléments de geométrie* trata de remediar lo que considera como defectos de ese método mediante una conciliación del encadenamiento lógico de las proposiciones con su orden natural.

84 Con paciencia similar se verifica la demostración clásica del Teorema de Pitágoras.

85 Meray, *Nouveaux éléments de geométrie* (Dijon, Jobard, 1903).

86 Esto se puede demostrar echando mano de una ejemplificación simbólica. Designemos por ε la relación de una recta a un plano en el que está contenida, y por ⊥ la relación de perpendicularidad (bien se trate de dos rectas, de dos planos, o de una recta y un plano). Las hipótesis son:

$$(1)\ P \perp Q\quad (2)\ D\,\varepsilon\,P\quad (3)\ D\,\varepsilon\,Q\quad (4)\ E\,\varepsilon\,P\quad (5)\ E \perp Q$$

La proposición 95 se traduce por la implicación:

$$D\,\varepsilon\,P \quad E\,\varepsilon\,P \quad E \perp D. \supset E\,\varepsilon\,R \quad R \perp D$$

La proposición 107 se traduce por la implicación:

$$R \perp D \quad D\,\varepsilon\,Q. \supset R \perp Q$$

La proposición 111 se traduce por la implicación:

$$P \perp Q \quad R \perp Q. \supset\ :\ E\,\varepsilon\,P. \quad E\,\varepsilon\,R \supset E \perp Q$$

Se notará que, según las reglas del método matemático, todas las hipótesis han sido utilizadas. Representémoslas por números y sus consecuencias serán numeradas:

La primera implicación es:

(2) . (4) . (5) . ⊃ (6) . (7) .

La segunda implicación es:

(7) . (3) ⊃ (8)

La tercera implicación es:

(1) . (8) . ⊃ : (4) . (6) . ⊃ (9)

Así, (2), (4) y (5) están contenidas en *A*, (3) en *B* y (1) en *C*. Igualmente se han empleado las deducciones intermedias: (6) en *C*, (7) en *B*, (8) en *C*, y, por fin, la consecuencia (9) es la tesis a demostrar.

87 El empirismo pretende que la geometría demuestre necesariamente sus teoremas en ejemplos particulares y concretos, y agregue a cada demostración algo así como esto: "La misma demostración podría repetirse en toda figura análoga." Pero si es la *misma* demostración, es inútil repetirla; por otra parte, sólo puede ser la *misma* si se refiere a la *única* figura ideal y universal.

88 Ya hemos hecho valer para Kant algunos argumentos que se emplean contra el empirismo, porque no hay ninguna diferencia esencial entre la tesis que fundamenta las verdades geométricas en una intuición

empírica y la que coloca una intuición *a priori*. En todo caso, se acude a la intuición, es decir, a la representación singular de una figura única y perfectamente determinada. Kant mismo nos autoriza a identificar ambos tipos de intuición cuando dice: "Si construyo un triángulo, represento el objeto que corresponde a este concepto, bien por la sola imaginación en la intuición pura, o bien, según ella, en el trazo sobre el papel en una intuición empírica, pero en ambos casos enteramente *a priori*, sin haber referido el modelo a una experiencia cualquiera" (B 741). Tenemos, pues, el derecho de identificar al triángulo representado en la imaginación con el triángulo trazado sobre el papel (B 65).

89 Análogamente pueden citarse pasajes donde parece que el filósofo reconoce al entendimiento como origen de las verdades en la geometría, o al menos considera que la unidad sintética del espacio es de orden intelectual (B 160, nota *Prolegómenos*, § 38). Sería difícil conciliar, sin embargo, esta concesión al intelectualismo con la tesis general de que los juicios sintéticos *a priori* son posibles en la medida que se basan en la intuición. Dicha concesión proviene de que, según Kant, la geometría considera el espacio geométrico, no como una simple forma de la intuición, sino como un objeto (B 160, nota), a pesar de lo cual se ve contradicha en este pasaje: "El espacio es simplemente la forma de la intuición externa (intuición formal) y no un objeto real que pueda ser percibido exteriormente" (B 457, nota). Semejantes incongruencias provienen de la perpetua confusión entre forma de intuición e intuición pura (B 160). No existe ninguna razón para que la forma de la intuición sea a su vez una intuición. Posiblemente esta aclaración sirva de método general para resolver

numerosas dificultades que presenta la teoría kantiana, y tanto el espacio como el tiempo serían entonces formas de la intuición, pero formas racionales y no sensibles.

90 Recordemos la definición kantiana de la intuición:

"Es el modo de conocimiento que se relaciona inmediatamente con los objetos y por medio de él éstos nos son dados" (*Logik*, § 1).

91 Es oportuno recordar aquí la opinión de Schopenhauer sobre el mismo tema, porque deriva abiertamente de la doctrina de Kant. Schopenhauer estima que la geometría debe renunciar a la pretensión de demostrar sus teoremas e imitar a la aritmética, que reposa por completo en la intuición del tiempo, base del acto de la numeración (Comp. *De la cuádruple raíz del principio de razón suficiente* § 39): "Toda proposición geométrica debería ser referida a la intuición sensible y la demostración consistiría en presentar bien clara la imagen geométrica." Concluye que el método de los geómetras es estéril y rebuscado y, para él, la geometría no-euclideana es consecuencia y prueba de este abuso de la lógica, del prurito de demostrar todo y deducir una tesis de otra, buscando siempre antecedentes y consecuentes. Es en vano querer darle una demostración al postulado de Euclides *El mundo como voluntad y como representación.* Por lo demás, estos ataques contra el método de la geometría juzgan a Schopenhauer y lo valoran como matemático. Nos autoriza a decir que su concepción de la geometría, en tanto fundada en la evidencia intuitiva, es la parodia y caricatura de la de Kant. Otro tanto puede afirmarse de su concepción de la aritmética: "Todo número presupone los números que le preceden como razón de ser; yo no puedo llegar al número 10 sino después de pasar por todos los números precedentes..." (*De la cuádruple*, § 38).

92 Compárense las investigaciones de Leibniz: *De determinantibus et determinantis et de unico* (Cont. en la *Lógica*).

93 *Dissertatio*, III, 15 C., (1770); *Prolegómenos*, § 13; *Metaph. Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, § 1, Def. II, Escolio III.

94 *Von dem ersten Grunde des Unterscheides der Gegenden in Raume*, (1768).

95 Como lo ha hecho notar Vaihinger (II, 522, 526), esta idea reaparece en una frase de los *Prolegómenos* donde Kant afirma que en el espacio las partes sólo son posibles en relación al todo. Comp. también, *Estética trascendental*, § 2, núm. 3.

96 Esta es la opinión de Vaihinger.

97 Por ejemplo, se concibe perfectamente que la relación de antecedente a consecuente sea inversa que la relación de consecuente a antecedente, sin necesidad de "construirla" en el tiempo ni en el espacio.

98 Consúltese en la obra de Méray, *Nouveaux éléments de geométrie*, la definición de homotaxia de segmentos, de ángulos, de ángulos diedros, de triángulos, de tiedros, de tetraedros, etcétera. Se llaman *isómeras* a las figuras cuyos elementos son iguales uno a uno, y se demuestra que para que dos figuras sean iguales (susceptibles de superposición) basta que satisfagan las condiciones de isometría y homotaxia. Si son isómeras y antitáxicas, se dice que son simétricas. Esto vale también para todos los elementos geométricos anteriormente citados.

99 Toda la geometría moderna se encarga de desmentir la aseveración de Kant, de que la geometría "no se refiere a las magnitudes en sí"; véase la obra de Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, (1899).

100 Según Vaihinger, la correspondencia entre Leibniz y Clarke ejerció gran influencia en la evolución del pensamiento kantiano.

101 Esto es lo que Leibniz sostenía contra Clarke y Newton.

102 Consúltese a Mario Pieri en: *I Principii della geometria di posizione, composti in sistema logico deduttivo; della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, ap. en *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*. Según este autor, la geometría es "el estudio de un cierto orden de relaciones lógicas" completamente separado de la intuición y desarrollado bajo la forma "de una ciencia ideal puramente deductiva y abstracta, como la aritmética".

103 *Gedanken von der wahren Schützung der Lebendigen Kräfte*, § 10, (1747).

104 Comp. A. Riehl, *Helmholtz en sus relaciones con Kant* (*Kantstudien*, 1904).

105 *The principles of mathematics*, § 149.

106 Klein, *Sobre la aritmetización de las matemáticas*.

107 *Del infinito matemático*, libro IV.

108 Es lo que Wundt demostró ampliamente en su ensayo: *Kant's kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit*, ap. en *Philosophische Studien*, (1865).

109 Debemos señalar, sin embargo, que por lo menos en una ocasión encontró la justa definición del infinito: "El infinito es, entre todas las magnitudes, la que no se ve disminuida por la substracción de una parte finita." *Historia general de la naturaleza y teoría del cielo* (1775). Desgraciadamente, no se atuvo a ella en el resto de sus especulaciones.

110 Vaihinger, en su *Commentar* dedica un amplio espacio a la discusión y comentario del espacio y las distintas definiciones que da Kant en el curso de sus obras filosóficas.

111 *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (1770). En el texto de la nota al pie de la página 396 de la edición Hartenstein, se verifica nuestra interpretación de la antinomia en el sentido que se le considera desde su carácter sintético y sucesivo. Kant agrega que la contradicción de la antinomia obedece a la necesidad subjetiva del entendimiento, de explorar el infinito, y al mismo tiempo de la imposibilidad de conocerlo. El estudio del infinito es posible, sin embargo, si consideramos que el alcance de la razón no está limitado por la intuición, tal como se hace en la matemática moderna.

112 Algunos autores han observado que las antinomias no prueban la idealidad del mundo exterior, puesto que las mencionadas contradicciones subsisten, ya sea que se considere al mundo como real o como ideal. Erhardt ha hecho una observación ingeniosa a este respecto: si el fundamento de la antinomia estuviera realmente en la hipótesis de la realidad del mundo, esta hipótesis debería figurar en la demostración de la tesis y

de la antítesis, lo cual no es así (*Kritik der kant'schen Antinomienlehre,* 1888).

113 Comp. Steckekmacher, *Die formale Logik Kant's in ihren Beziehungen zur tranzendentalen* (Breslau, 1879).

114 En el capítulo 26 de la *Crítica,* afirma Kant "La coincidencia completa de las categorías en las funciones lógicas y generales del pensamiento."

115 Contenida en el *Organon* de Lambert.

116 Erhardt critica esta predilección de Kant por la arquitectónica y le atribuye el origen de la invención de las antinomias de la razón práctica y de la facultad de juzgar, que se antojan apéndices artificiales a la antinomia de la razón pura.

117 *Laws of Thought,* prefacio (1854).

118 Russell, *Recent work on the principles of mathematics.*

119 Según Zimmermann, "el prejuicio matemático de Kant (la tesis de que los juicios matemáticos sean sintéticos) es la raíz de la *Crítica*". Compárese la frase del mismo autor que hemos puesto como epígrafe a este trabajo: "En caso de que los juicios matemáticos no fueran sintéticos, se derrumbaría toda la base de la crítica kantiana de la razón." Kuno Fisher sostiene que "el aspecto más sólido de la filosofía crítica en Kant es la fundamentación de la naturaleza científica de la matemática".

120 Así lo afirma el propio Kant en los *Principios metafísicos de la ciencia natural,* prefacio.

121 Comp. la *Lógica* de Leibniz.

122 Nos hemos abstenido de repetir aquí las consideraciones de orden histórico que indicamos en otra obra: *Kant y la matemática moderna.*

ÍNDICE

En la Imprenta Universitaria, bajo la dirección de Rubén Bonifaz Nuño, se terminó la impresión de este libro el día 24 de junio de 1960. La edición estuvo al cuidado de Heriberto Malváez G. Se hicieron 1,500 ejemplares.